Вероятностная модель системы «паразит-хозяин»

Павлов Ю.Л., Хворостянская Е.В.
ИПМИ КарНЦ РАН

Основной закон количественной паразитологии

Число паразитов на хозяине
является случайной величиной, имеющей
отрицательное биномиальное распределение.

Случайная величина ξ, принимающая целые неотрицательные значения, имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами α и p, $\alpha > 0$, $0 < p < 1$, если

$$p_k = \mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha} (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Название «отрицательное биномиальное распределение» связано с тем, что вероятности (1) являются коэффициентами разложения бинома с отрицательным показателем степени $p^{\alpha}(1-(1-p)z)^{-\alpha}$ по степеням z.

Пусть η – случайная величина, имеющая гамма–распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x, \alpha, \lambda > 0.$$

Пусть ξ – случайная величина такая, что

$$\mathrm{P}\{\xi = k \mid \eta = m\} = \frac{m^k}{k!} e^{-m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда случайная величина ξ имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами α и $p=\lambda/(1+\lambda)$.

Ю.Л. Павлов, Е.П. Иешко. Модель распределения численности паразитов. Доклады АН СССР, т. 289, №3, 1986, 746-748.

Лосось

Жемчужница пресноводная

Использование такого подхода полезно для оценки степени равновесия системы «паразит-хозяин» и для прогнозирования развития паразитологической ситуации. Зная закон распределения численности паразитов и его параметры, можно оценить устойчивость паразитарной системы в целом. Поэтому важно знать структуру зараженности, т.е. доли особей, имеющих определенное число паразитов. Для прогнозирования количества погибающих от чрезмерного заражения хозяев необходимо знать распределение максимального значения числа паразитов на особи.

Ю.Л. Павлов. Об основном законе количественной паразитологии. Обозрение прикладной и промышленной математики, 2012, т.19, вып.4, с. 587–588.

Рассмотрим модель системы «паразит–хозяин», в которой число хозяев равно N, а число паразитов не превосходит n.

Пусть $\eta_1,\ldots,\eta_N$ – случайные величины, соответствующие числу паразитов на хозяевах $1,\ldots, N$. Поскольку $\eta_1+\ldots+\eta_N \le n$, случайные величины $\eta_1,\ldots,\eta_N$ являются зависимыми.

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_N$ – независимые случайные величины такие, что

$$p_k = \mathrm{P}\{\xi = k\} = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha} (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Учитывая основной закон количественной паразитологии, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\{\eta_1 = k_1, \ldots, \eta_N = k_N\} \\ &= \mathrm{P}\{\xi_1 = k_1, \ldots, \xi_N = k_N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N \le n\}. \end{aligned} \qquad (2)$$

А.Н. Чупрунов, И. Фазекаш. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып.1. С. 140−158.

А.Н. Чупрунов, И. Фазекаш. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122−129.

Теорема 1. *Пусть* $n, N\to\infty$ *так, что* $N^{-1/2}(n-N\alpha(1-p)/p)\to+\infty$, $0< p_0\le p \le p_1 <1$, $0<\alpha_0\le \alpha \le \alpha_1<\infty$, $r \ge 2$ *фиксировано. Тогда*

$$\mathrm{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi N p_r(1-p_r)}}\, e^{-z^2/2}$$

равномерно относительно целых k, *для которых* $z=(k-Np_r)(N(1-p_r)\ p_r)^{-1/2}$ *лежит в любом конечном фиксированном интервале*.

Теорема 2. *Пусть* $n, N\to\infty$ *так, что* $N^{-1/2}(n-N\alpha(1-p)/p)\to+\infty$, $0< p_0\le p \le p_1 <1$, $0< \alpha_0\le \alpha \le \alpha_1<\infty$,

$$r = \left[\left(\ln N + (\alpha-1)\ln\ln N + (\alpha-1)\ln(p/q) - \ln\Gamma(\alpha) + z - q\right)/q\right],$$

где $q=|\ln(1-p)|$, $\Gamma(\alpha)$ – *значение гамма-функции в точке* α, z – *произвольная постоянная*, $[x]$ *означает целую часть числа* x. *Тогда*

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)} \le r\} \to e^{-e^{-z}}.$$

Спасибо за внимание!