

О работах
Г.И.Марчука
в области физики
атмосферы, океана и
окружающей среды

В.П. Дымников^(1, 3), В.Б. Залесный⁽²⁾,
А.С. Саркисян⁽²⁾, А.Е. Алоян⁽⁴⁾

План доклада

- 1 Введение (книги Г.И.Марчука, научные приоритеты)
- 2 Прогноз погоды, общая циркуляция атмосферы и океана, климат
- 3 Сопряженные уравнения (проблема чувствительности, диагноз, программа «ЭАЗО»)
- 4 Проблема окружающей среды
- 5 Математическая геофизическая гидродинамика
- 6 Заключение



В истории вычислительной геофизической гидродинамики **Гурий Иванович Марчук** – одна из ключевых фигур.

Имя Марчука в вычислительной геофизической гидродинамике связано в первую очередь с двумя методами: **методом расщепления** и **методом сопряжённых уравнений**.

Выбор такой методологии обусловлен (по моему мнению!) двуmodalностью таланта Г.И.Марчука: **талантом учёного** и **талантом организатора** .

Если вам суждено воздвигнуть себе памятник, то в его основании будут лежать написанные вами книги.

Guri Marchuk is a key figure in the history of computational geophysical hydrodynamics

Marchuk's name in computational geophysical hydrodynamics is primarily associated with two methods: the **splitting-up method** and the **method of adjoint equations**

It is my belief that the choice of this methodology is driven by the bimodal talent of Guri Marchuk: as a **scientist** and as an **organizer**

If you are destined to have a monument erected to you, its base will be constructed with the books written by you

Введение

❖ I. Прогноз погоды, общей циркуляции атмосферы и океана

1. Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеиздат, 1967, 356 стр. (Numerical Methods in Weather Prediction. New York, London, Acad. Press, 1974, 277 pp.)
2. Численное решение задач динамики атмосферы и океана на основе метода расщепления. Новосибирск, Наука, 1972, 168 стр.
3. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л., Гидрометеиздат, 1974, 304 стр.

Введение

❖ I. Прогноз погоды, общей циркуляции атмосферы и океана

4. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана.
Л., Гидрометеиздат, 1984, 320 стр.
(Соавторы – В.П.Дымников, В.Б.Залесный, В.Н.Лыкосов, В.Я.Галин, В.Л.Перов)
5. Облака и климат. Л., Гидрометеиздат, 1986, 512 стр
(Соавторы – К.Я.Кондратьев, В.В.Козодёров, В.И.Хворостянов)
6. Математические методы в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л., Гидрометеиздат, 1987, 288 стр.
(Соавторы – В.П.Дымников, В.Б.Залесный)

Введение

❖ II. Динамика океана

7. Океанские приливы. Математические модели и численные эксперименты.
Л., Гидрометеиздат, 1977, 295 стр.
Соавтор – Б.А.Каган
(Ocean Tides: Mathematical Models and Numerical Experiments. Oxford, Pergamon Press, 1984, 292 pp.)
8. Динамика океанских приливов. Л., Гидрометеиздат, 1983, 359 стр.
Соавтор – Б.А.Каган
9. Математическое моделирование циркуляции океана.
М., Наука, 1988, 302 стр.
Соавтор – А.С.Саркисян
(Mathematical Modelling of Ocean Circulation. Berlin, Springer, 1988, 290 pp.)

Введение

❖ III. Атмосферная оптика

10. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике.
Новосибирск, Наука, 1976, 283 стр.
Соавторы – Г.А.Михайлов, М.А.Назаралиев и др.
(The Monte-Carlo Methods in Atmospheric Optics.
Berlin, Springer, 1980, 200 pp.)
11. Поле излучения сферической атмосферы.
Л., ЛГУ, 1977, 214 стр.
Соавторы – К.Я.Кондратьев, Г.А.Михайлов,
М.А.Назаралиев и др.
12. Радиационный баланс Земли: Ключевые аспекты.
М., Наука, 1988, 223 стр.
Соавторы – К.Я.Кондратьев, В.В.Козодёров
(Earth Radiation Budget: Key Aspects.
Moscow, Nauka, 1990, 231 pp.)

Введение

❖ IV. Проблемы окружающей среды

13. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды.
Москва, Наука, 1982, 319 стр.
(Mathematical Models in Environmental Problems.
Amsterdam, Elsevier, 1986, 218 pp.)
14. Приоритеты глобальной экологии.
Москва, Наука, 1992, 263 стр.
Соавтор – К.Я.Кондратьев



**Прогноз погоды,
общей циркуляции атмосферы
и океана**



Уравнение для изменения давления

Запишем систему уравнений (1.34)–(1.36) в следующем виде¹:

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} + \frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{l^2}{Pg} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{g}{l} (T, z) - \frac{\varepsilon}{c_p} = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\tau}{\zeta}, \quad (2.2)$$

$$T = -\frac{R}{g} \zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad (2.3)$$

где $\zeta = \frac{p}{P}$, причем P – среднее давление по земной поверхности, принимаемое равным 1000 мб, и

$$m^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{gl^2}.$$

Будем полагать, что параметр m^2 изменяется по высоте незначительно по сравнению с относительными изменениями по высоте вертикальной скорости τ .

Исключим из уравнения (2.2) производную температуры $\frac{\partial T}{\partial t}$ при помощи уравнения статики. Тогда получим:

$$-\frac{g}{l} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{g}{l} (T, z) - \frac{\varepsilon}{c_p} = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\tau}{\zeta}. \quad (2.4)$$

Обе части этого уравнения умножим на ζ и затем продифференцируем по ζ . Тогда будем иметь:

$$-\frac{g}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\varepsilon}{c_p} \right] = \frac{m^2 l^2}{PR} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}. \quad (2.5)$$

Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории

1. Постановка задачи

Рассматривается бароклинная адиабатическая модель атмосферы, описываемая в системе координат (x, y, p) следующей системой дифференциальных уравнений:

*Изв. АН СССР: физика атмосферы и океана, 1967, том 3, №11, с. 1166–1178. Совместно с Г. Р. Контаевым. Г. С. Ривиным

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + vu_y + lv &= -gz_x, \\v_t + uv_x + vv_y - lu &= -gz_y, \\T_t + uT_x + vT_y - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} \frac{RT^*}{p} \tau &= 0, \\u_x + v_y + \tau_p &= 0, \\T &= -g \frac{p}{R} z_p,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где u, v, τ – соответственно компоненты вектора скорости относительно осей x, y, p ; l – параметр Кориолиса; p – давление; T – температура; z – отклонение высоты изобарической поверхности от стандартного значения; γ и T^* – стандартные значения температурного градиента ($\gamma = -T_z$) и температуры соответственно.

В качестве граничных условий по вертикали выберем следующие:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad p = P; \quad pz_p = 0 \quad \text{при} \quad p = 0,\tag{1.2}$$

где w – вертикальная компонента вектора скорости в системе координат (x, y, z) ; P – давление на уровне моря.

На боковых границах интегрирования полагаем

$$u_t = v_t = z_t = 0.\tag{1.3}$$

Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории

2. Метод решения уравнений модели

Расщепление

Нахождение решения системы (1.1) в момент времени $t + \Delta t$ по известному решению в момент времени t производится в два этапа. На первом этапе решается система, описывающая перенос метеорологических полей по траекториям частиц

$$\vec{\varphi}_t + u\vec{\varphi}_x + v\vec{\varphi}_y = 0. \quad (2.1)$$

Здесь вектор $\vec{\varphi}$ имеет вид

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

На втором этапе решается система, описывающая адаптацию метеорологических полей

$$u_t + lv = -gz_x, \quad v_t - lu = -gz_y,$$

$$T_t - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} RT^* \tau = 0, \quad (2.3)$$

$$u_x + v_y + \tau_p = 0, \quad T = -\frac{gp}{R} z_p.$$

Для решения системы (2.1) используется метод предиктор–корректор, а для решения системы (2.3) – метод биортогонализации [3, 4, 6, 7].

Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории

Решение уравнений переноса

Метод предиктор–корректор состоит в том, что для решения системы (2.1) используется устойчивая разностная схема первого порядка точности для нахождения решения при $t = t_n + (\Delta t/2)$, а затем получается решение для $t = t_n + \Delta t$ с помощью дивергентной схемы с центральными разностями, имеющей второй порядок точности.

Пусть $\vec{\varphi}_{k,m,j}^n$ есть значение функции $\vec{\varphi}(x, y, p, t)$ в узлах сетки, где n – номер шага по времени. Обозначим h – шаг по пространственным переменным; Δp_j – шаг по вертикали; Δt – шаг по времени.

Кроме того, будем рассматривать следующие операторы:

$$\begin{aligned}\Delta_{+k}\vec{\varphi}_{k,m,j}^n &= \vec{\varphi}_{k+1,m,j}^n - \vec{\varphi}_{k,m,j}^n, \\ \Delta_{-k}\vec{\varphi}_{k,m,j}^n &= \vec{\varphi}_{k,m,j}^n - \vec{\varphi}_{k-1,m,j}^n.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Аналогичный смысл имеют операторы Δ_{+m} , Δ_{-m} , Δ_{+j} , Δ_{-j} , Δ_{+n} , Δ_{-n} .

Используя введенные обозначения, выпишем разностную схему предиктора для системы (2.1):

$$\frac{\vec{\varphi}^{n+1/8} - \vec{\varphi}^n}{\Delta t/2} + u^n \frac{\Delta_k \vec{\varphi}^{n+1/8}}{h} = 0,\tag{2.5}$$

$$\frac{\vec{\varphi}^{n+1/4} - \vec{\varphi}^{n+1/8}}{\Delta t/2} + v^n \frac{\Delta_m \vec{\varphi}^{n+1/4}}{h} = 0,\tag{2.6}$$

причем оператор Δ_k имеет вид:

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta_{-k} & \text{при } u^n \geq 0, \\ \Delta_{+k} & \text{при } u^n < 0. \end{cases}\tag{2.7}$$

Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории

Аналогичный смысл имеет оператор Δ_m . Кроме того, в (2.5) и (2.6) мы для простоты записи опустили индексы по пространственным переменным. В дальнейшем будем опускать тот индекс по пространственным переменным, который совпадает соответственно с k, m, j . Для решения (2.5) и (2.6) используется метод факторизации [3].

Разностная схема корректора имеет вид:

$$\frac{\bar{\varphi}^{n+1/2} - \bar{\varphi}^n}{\Delta t} + \frac{(\Delta_{+k} + \Delta_{-k})(u^{n+1/4}\bar{\varphi}^{n+1/4})}{2h} + \frac{(\Delta_{+m} + \Delta_{-m})(v^{n+1/4}\bar{\varphi}^{n+1/4})}{2h} = 0. \quad (2.8)$$

Вывод уравнения для высоты изобарической поверхности

Систему (2.2) запишем в следующем виде:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} + lv^{n+1} = -gz_x^{n+1}, \quad (2.9)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\Delta t} - lu^{n+1} = -gz_y^{n+1}, \quad (2.10)$$

$$\frac{T^{n+1} - T^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} RT^* \tau^{n+1} = 0, \quad (2.11)$$

$$u_x^{n+1} + v_y^{n+1} + \tau_p^{n+1} = 0, \quad (2.12)$$

$$T^{n+1} = -\frac{gp}{R} z_p^{n+1}. \quad (2.13)$$

Из этих пяти уравнений с пятью неизвестными $u^{n+1}, v^{n+1}, \tau^{n+1}, T^{n+1}, z^{n+1}$ получим одно уравнение с одним неизвестным z^{n+1} . Для этого из уравнений (2.9) и (2.10) выразим

Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории

u^{n+1} и v^{n+1} через z^{n+1} , а затем, заменив в (2.11) T^{n+1} на z^{n+1} с помощью (2.13), из (2.11) выразим τ^{n+1} через z^{n+1} . Подставив полученные выражения в уравнение неразрывности (2.12), получим уравнение для z^{n+1} .

Приведем сразу необходимые промежуточные и конечный результаты

$$u^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha^2} [u^{n+1/2} - g\Delta t z_x^{n+1} - \alpha (u^{n+1/2} - g\Delta t z_y^{n+1})], \quad (2.14)$$

$$v^{n+1} = \frac{1}{1 + \alpha^2} [v^{n+1/2} - g\Delta t z_y^{n+1} + \alpha (u^{n+1/2} - g\Delta t z_x^{n+1})], \quad (2.15)$$

$$\tau^{n+1} = -\frac{g}{(\gamma_a - \gamma) \Delta t R^2 T^*} \left[p^2 z_p^{n+1} + p \frac{R}{g} T^{n+1/2} \right], \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{\chi} \frac{\partial z^{n+1}}{\partial p} \right) + m^2 h^2 [z_{xx}^{n+1} + z_{yy}^{n+1} + \beta z_x^{n+1}] = \\ & = - \left\{ \frac{R}{g} \left(\frac{p T^{n+1/2}}{\chi} \right)_p - 2\bar{m}^2 h [u_x^{n+1/2} + v_y^{n+1/2} + \alpha (u_y^{n+1/2} - v_x^{n+1/2}) + \beta u^{n+1/2}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом были использованы следующие обозначения: $\alpha = l\Delta t$, $\beta = \alpha_y$, $\chi = T^*/T_1^*$ (T_1^* – значение температуры на уровне моря для стандартной атмосферы),

$$m^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) T_1^* R^2 \Delta t^2}{g (1 + \alpha^2) h^2}, \quad \bar{m}^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) T_1^* R^2 \Delta t}{2g^2 (1 + \alpha^2) h} = \frac{m^2 h}{2g\Delta t}.$$

Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории

Поверхность, мб	Схема	δ	δ'	r	r'
1000	Квазигеострофическая	1,23	0,89	0,41	0,55
	Негеострофическая	0,63	0,54	0,69	0,80
850	Квазигеострофическая	1,10	0,90	0,35	0,49
	Негеострофическая	0,60	0,50	0,71	0,83
700	Квазигеострофическая	0,98	0,85	0,38	0,55
	Негеострофическая	0,62	0,48	0,74	0,84
500	Квазигеострофическая	0,83	0,79	0,57	0,70
	Негеострофическая	0,62	0,52	0,79	0,87
300	Квазигеострофическая	0,99	0,99	0,16	0,16
	Негеострофическая	0,61	0,54	0,78	0,83

Глобальная модель общей циркуляции атмосферы

1. Уравнение гидродинамики

Принимая в качестве вертикальной координаты давление, нормированное к его значению на поверхности Земли, и используя квазистатическое приближение, запишем уравнения гидротермодинамики в сферической системе координат

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} - \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi\right) v + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda}\right) &= \frac{F_u}{\pi}, \\ \frac{dv}{dt} + \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi\right) u + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right) &= \frac{F_v}{\pi}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \pi u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \pi v \cos \varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \pi \dot{\sigma} &= 0, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p \sigma} \left[\pi \dot{\sigma} + \sigma \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\right)\right] &= \frac{F_T}{\pi} + \frac{\epsilon}{\pi}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{F_q}{\pi} - \frac{C - E}{\pi}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= -\frac{RT}{\sigma},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

2. Симметризация уравнений гидротермодинамики

Исходную систему (1.1) с помощью функции $\sqrt{\pi}$ приведем к симметризованному виду. Главной целью такой симметризации является возможность построения достаточно простых конструкций для получения абсолютно устойчивых разностных схем решения многомерных уравнений переноса субстанций вдоль траекторий, а также конечно-разностных аналогов интегральных законов сохранения. Система симметризованных уравнений имеет вид [3]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sqrt{\pi} u}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u \cdot u}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} u}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} v \cos \varphi u}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial \sqrt{\pi} u}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} u}{\partial \sigma} - \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \sqrt{\pi} v + \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\sqrt{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \right] = \frac{F_u}{\sqrt{\pi}}, \\
 & \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u v}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} v v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\pi} v}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} v}{\partial \sigma} + \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) \sqrt{\pi} u + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{a} \left[\sqrt{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right] = \frac{F_v}{\sqrt{\pi}},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Глобальная модель общей циркуляции атмосферы

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u T}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} T v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\pi} T}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} T}{\partial \sigma} - \\ & - \frac{RT}{c_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right) - \frac{RT \pi \dot{\sigma}}{c_p \sqrt{\pi} \sigma} = \frac{F_T}{\sqrt{\pi}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{1}{2} u \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} u q}{\partial \lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} v \cos \varphi \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sqrt{\pi} v \cos \varphi q}{\partial \varphi} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{\partial \sqrt{\pi} q}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{\sigma} \sqrt{\pi} q}{\partial \sigma} = \frac{F_q}{\sqrt{\pi}} - \frac{C - E}{\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma}.$$

Глобальная модель общей циркуляции атмосферы

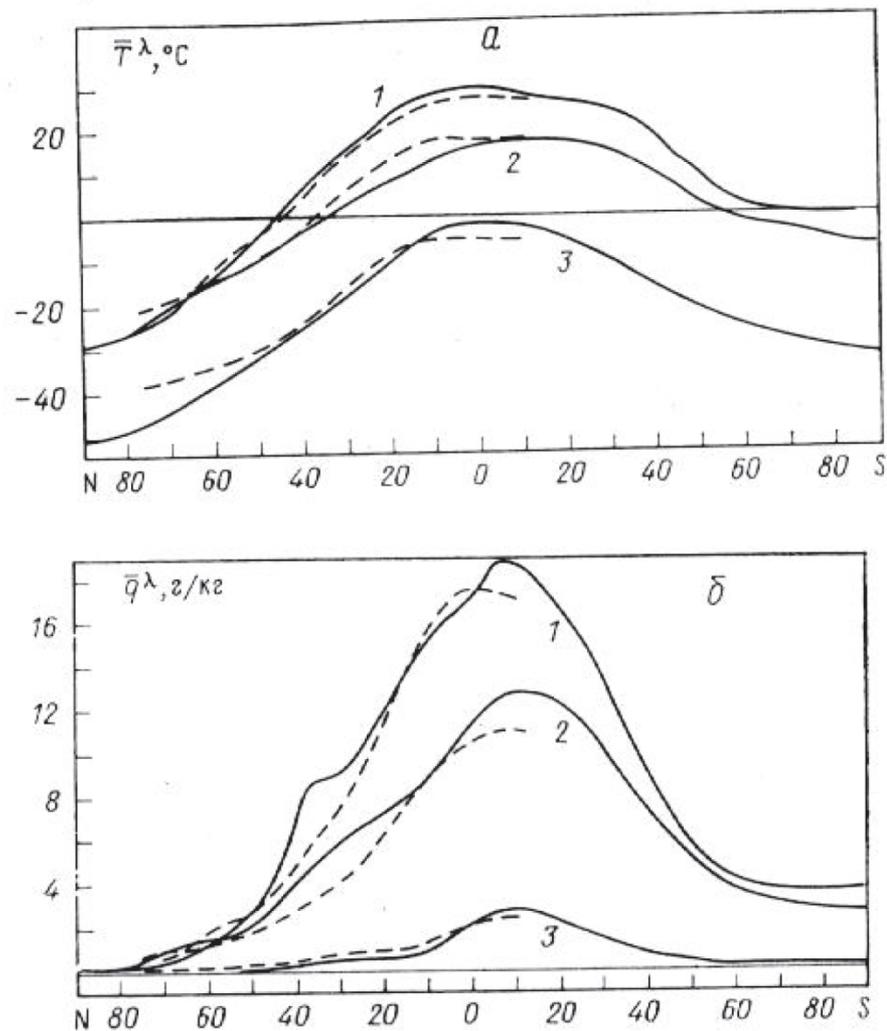


Рис. 5: Зависимость от широты зонально-осредненной температуры (а) и влажности (б) (сплошная линия – эксперимент, пунктирная – реальные данные): 1 – уровень 1000 мбар, 2 – 850 мбар, 3 – 500 мбар.

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ



СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$A(u) = B(u) \cdot u, \quad u \in D(A)$$

$$A_u^* = B^*(u).$$

$C(u), C^{\theta/\rho}(u), u \in D$ принадлежат одному классу эквивалентности, если $C^*(u)u = C^{\theta/\rho}(u) \cdot u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f, \quad A(u) = B(u) \cdot u$$

$$-\frac{\partial u^*}{\partial t} + B^*(u)u^* = g$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u, u^*) = (f, u^*) - (g, u)$$

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА *

Вводятся в рассмотрение сопряженные уравнения гидродинамики по отношению к важнейшим линейным функционалам задач динамики атмосферы. Проводится исследование свойств сопряженных функций, описываемых сопряженными уравнениями, и дается их интерпретация как функций влияния по отношению к вариациям гидродинамических элементов, в зависимости от входных параметров задач.

1. Сопряженные уравнения динамики атмосферы

Рассмотрим систему уравнений динамики атмосферных процессов в адиабатическом приближении и исследуем структуру оператора задачи. Исследования начнем с простейшего случая баротропной атмосферы. В этом случае имеем задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} + lv + RT \bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} + lu + RT \bar{T} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наряду с задачей (1.6) введем в рассмотрение сопряженную

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^*}{\partial t} - u \frac{\partial u^*}{\partial x} - v \frac{\partial u^*}{\partial y} + lv^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{\partial v^*}{\partial t} - u \frac{\partial v^*}{\partial x} - v \frac{\partial v^*}{\partial y} - lu^* - R\bar{T} \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} &= 0, \\ -\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

при условии

$$u^* = u_T^*, \quad v^* = v_T^* \quad \text{при } t = T. \quad (1.9)$$

Задачи (1.6), (1.7) и (1.8), (1.9) запишем в операторной форме. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + A\Phi &= 0, \\ B\Phi &= B\Phi_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

и

$$\begin{aligned} -B \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - A\Phi^* &= 0, \\ B\Phi^* &= B\Phi_T^* \quad \text{при } t = T. \end{aligned} \quad (1.11)$$

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА *

Излагаются методические вопросы исследования чувствительности дискретных моделей динамики атмосферы и океана численными методами. Рассмотрены три метода: 1) прямого моделирования; 2) основанный на уравнениях в вариациях; 3) использующий сопряженные уравнения гидротермодинамики. Обсуждаются практические применения этих методов.

*Изв. АН СССР: физика атмосферы и океана, 1979, том 15, №11, с. 1123–1131. Совместно с В. В. Пененко.



СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТМОСФЕРЫ С ОКЕАНАМИ И КОНТИНЕНТАМИ *

Для целей долгосрочного прогноза погоды исследуется модель термического взаимодействия атмосферы Земли, Мирового океана и континентов. Применяется подход, основанный на использовании решения определенным образом поставленной сопряженной задачи. Сопряженное решение связывается с прогнозируемым функционалом от аномалии температуры, по отношению к которому оно выступает в качестве основного критерия значимости входной информации. Для численного решения строится балансная абсолютно устойчивая разностная схема. Применяемый метод расщепления позволил построить экономичный вычислительный алгоритм. Результаты численного эксперимента анализируются.

*Изв. АН СССР: физика атмосферы и океана, 1976, том 12, №5, с. 459–469. Совместно с Ю. Н. Скибой.

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Постановка задачи

Рассмотрим сферическую систему координат (λ, ϑ, z) , связанную с Землей; $0 \leq \lambda < 2\pi$ – географическая долгота, $0 \leq \vartheta < \pi$ – дополнение до широты, положительное направление оси z отсчитывается в атмосферу от поверхности Земли $S = \{x : 0 \leq \lambda < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi, z = 0\}$. Пусть $S = S_o \cup S_k \cup S_l$, где S_o, S_k, S_l – подмножества S , на которых атмосфера граничит с океаном, континентами и льдами соответственно; $D = (\bigcup_{i=1}^3) \cup S$ – ограниченная область, где область D_1 представляет собой нижние слои атмосферы, заключенные в шаровом слое $0 < z < H_a$, D_2 – деятельный слой океана с нижней границей $z = -H_o$, D_3 – слой почвы континентов с нижней границей $z = -H_k$.

Рассмотрим в D уравнение притока тепла

$$MT = c_p \bar{\rho} T_t + \operatorname{div}(uT) - (\nu T_z)_z - \operatorname{div}(\mu \nabla_2 T) = f, \quad (1)$$

где $T(x, t)$ – отклонение температуры частиц воздуха, воды или земли от климатической, $f = \delta F \cdot \delta(z)$, $\delta F(\lambda, \vartheta, t)$ – аномалии полного потока радиации на S , $\bar{\rho}(z)$ – стандартное значение плотности, c_p – удельная теплоемкость, a – радиус Земли, $\operatorname{div}_2(\cdot)$ и $\nabla_2(\cdot)$ – двумерные (по λ и ϑ) дивергенция и градиент; $\nu = c_p \bar{\rho} \nu_1$, $\mu = c_p \bar{\rho} \mu_1$, где ν_1, μ_1 – вертикальный и горизонтальный коэффициенты теплопроводности; $\mathbf{u} = \{u, v, w\} \equiv c_p \bar{\rho} \mathbf{u}_1$, где $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$ – известный вектор скорости ветра (в D_1), и воды (в D_2), удовлетворяющий в D_1 и D_2 уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (2)$$

В D_3 $\mathbf{u}_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $c_p = C = \text{const}$; в D_1 $\mu_1 = \mu_a = \text{const}$; в D_2 $\mu_1 = \mu_0 = \text{const}$; $\bar{\rho}$, \mathbf{u} – достаточно гладкие ограниченные функции в каждой из D_i , но имеющие разрыв первого

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

рода на S , кроме функции w , которая непрерывна в \bar{D} и равна нулю при $z = 0$, $z = H_a$ и $z = -H_0$; $\nu_1 = \nu_1(z)$ – непрерывная в каждом D_i функция z (в океане $\nu_1 = \nu_1(z, \vartheta)$), ограниченная в D . На S функция ν_1 имеет разрыв первого рода. Примерные графики этой функции приведены в [1]. Разрывность коэффициентов – следствие того, что область D составлена из трех разнородных по своим физическим свойствам сред.

В качестве начального условия задачи примем

$$T(x, 0) = g(x). \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\nu T_s = 0 \quad \text{при } z = H_a, \quad z = -H_0, \quad z = -H_k, \quad (4)$$

$$\nu T_s = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{на } S_{\text{л}}. \quad (5)$$

На боковой поверхности Мирового океана σ

$$\mu \nabla_2 T, n) = 0, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к σ . В силу однозначности функции T в точках полюсов $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ имеем

$$\bar{T}(z, t) = T(\lambda, 0, z, t), \quad \tilde{T}(z, t) = T(\lambda, \pi, z, t) \quad (7)$$

при всех $0 \leq \lambda < 2\pi$; \bar{T} , \tilde{T} – ограниченные функции. На поверхности $S_0 \cup S_k$ ставятся условия сопряжения, выражающие непрерывность T и потока νT_z :

$$[T] = 0, \quad [\nu T_z] = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (8)$$

где $[\cdot]$ – символ скачка функции. Условия (8) характерны для задач теплообмена между соприкасающимися средами путем конвекции, а также для задач дифракции [2].

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в D сопряженную по Лагранжу к (1)–(8) задачу

$$-c_p \bar{\rho} T_t^* - \operatorname{div}(uT^*) - (\nu T_z^*)_z - \operatorname{div}_2(\mu \nabla_2 T^*) = f \equiv F^* \delta(z) \quad (1')$$

для функции $T^*(x, t)$, удовлетворяющей начальному условию

$$T^*(x, t_1) = g^*(x) \quad (3')$$

и граничным условиям (4)–(8), которые будем обозначать (4')–(8'). Условия на коэффициенты уравнения прежние. Обобщенное решение сопряженной задачи определяется так же, как и для задачи (1)–(8), только η удовлетворяет условию $\eta(x, t) = 0$. Для $T^*(x, t)$, $g^*(x)$ и $f^*(x, t)$ справедливо уравнение энергетического баланса (10), энергетическое неравенство (11) и балансное соотношение (12) с учетом изменения направления отсчета времени.

Умножим уравнение (1) скалярно (в $L_2(Q_{t_1})$) на T^* , уравнение (1') – на T и вычтем одно из другого. В результате приходим к тождеству

$$\int_D c_p \bar{\rho} T(x, t_1) g^*(x) dx + \int_0^{t_1} dt \int_S F^* T dS = \int_D c_p \bar{\rho} g(x) T^*(x, 0) dx + \int_0^{t_1} dt \int_S T^* \delta F dS. \quad (13)$$

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

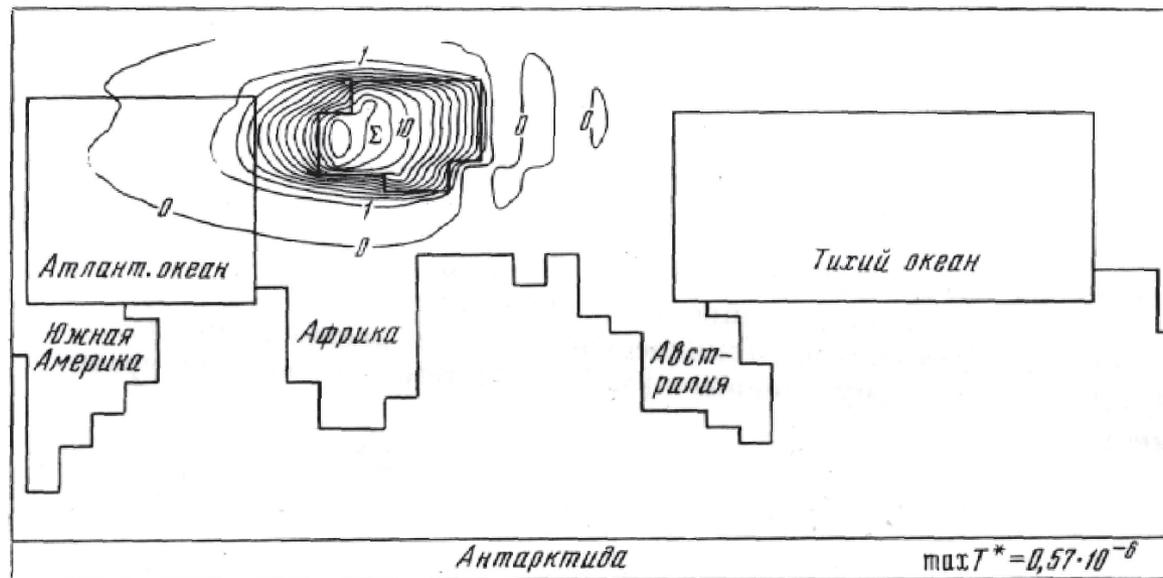


Рис. 2: Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 48$.

СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

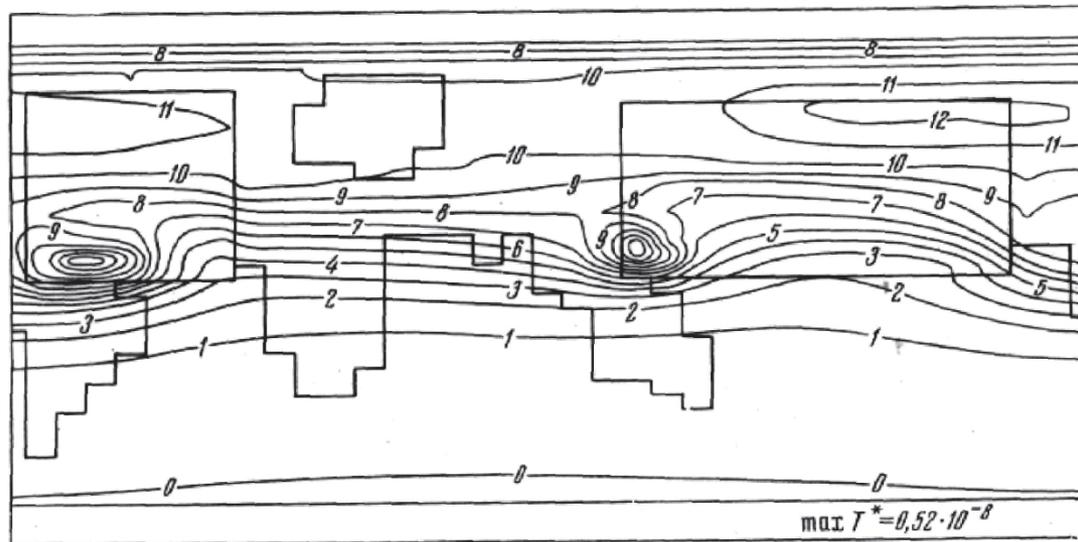


Рис. 6: Изолинии функции $T^*/\max T^*$ при $z = 0$, $\alpha = 13$.

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ



ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Сопряженные уравнение и глобальный перенос примеси

Одной из центральных проблем современности является охрана окружающей среды. Моделирование процессов глобального переноса примесей в атмосфере - одна из задач среди этих проблем. Пусть модель переноса рассматривается применительно к Земле в системе координат (λ, ψ, z) , $\phi = \phi(\lambda, \psi, z, t)$ – концентрация примесей, $F = F(\lambda, \psi, z, t)$ – функция размещения и мощности источников. Основное уравнение переноса примесей на сфере запишем в следующем виде [9]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \phi}{\partial z} -$$
$$- \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} = F$$

при соответствующих физическому процессу граничных условиях и начальном условии

$$\phi = \phi_{(0)} \quad \text{при } t = 0$$

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Пусть требуется вычислить функционал

$$J = \int_0^T dt \int_{\Omega} p \phi d\Omega, \quad p = \begin{cases} \text{const}, & \text{на } \omega \\ 0, & \text{вне } \omega \end{cases}$$

где $p = p(\lambda, \psi, z, t)$ - заданная функция с носителем в Ω :

$$\omega \subset \Omega$$

Множество ω соответствует зоне, где производится оценка загрязнения. В зависимости от задания области ω мы можем получить различные интегральные характеристики поля загрязнения примесей. Итак, задача сводится к оценке функционалов вида (3), определенных на функциях состояния, удовлетворяющих исходной задаче (1)-(2).

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Для оценки функционала J используется подход, основанный на использовании сопряженных задач

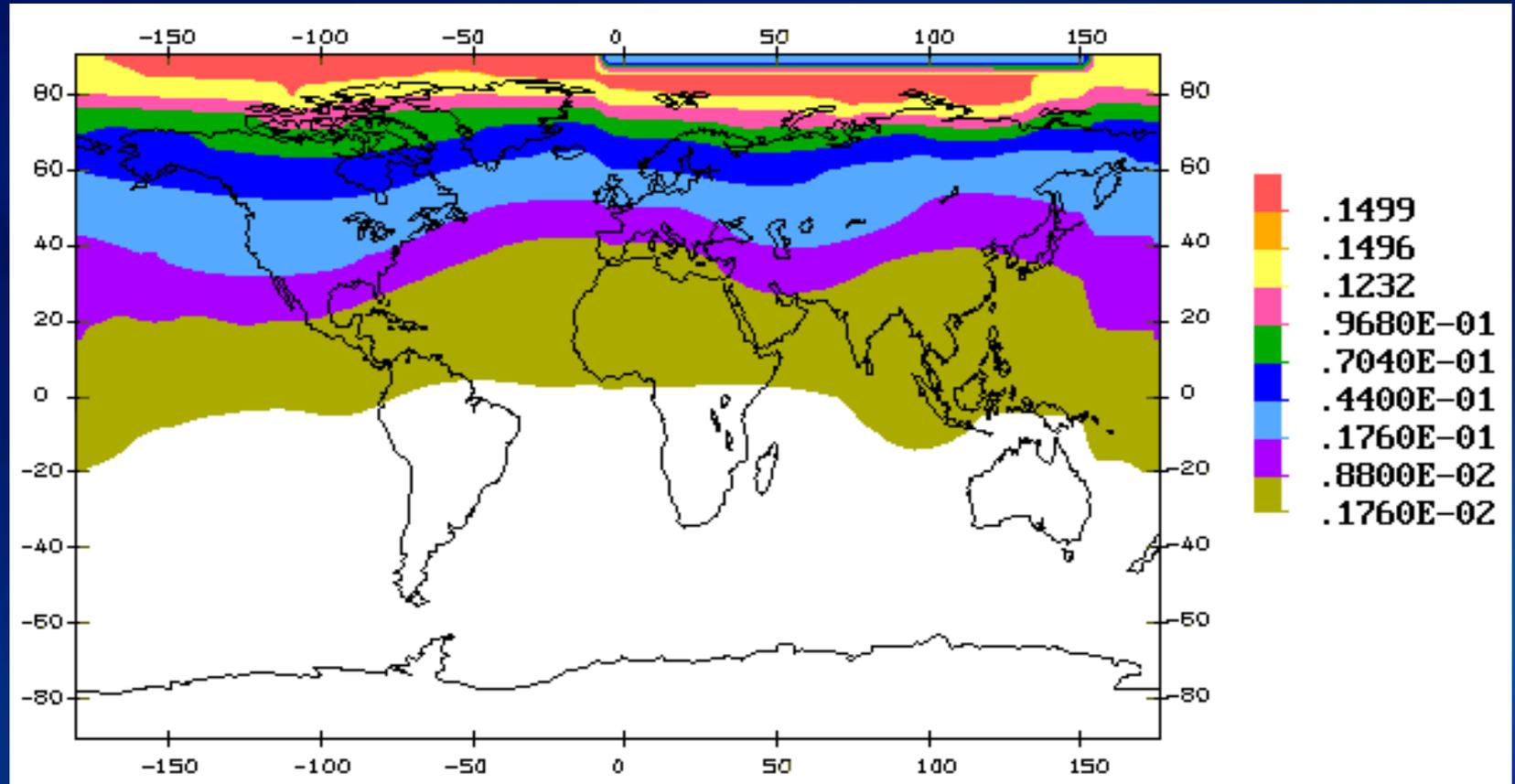
$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \phi^*}{\partial t} - \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi} - (w - w_g) \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi} = p \\ & \phi^* = 0, \text{ при } t = T \end{aligned}$$

Если теперь воспользоваться решением сопряженной задачи, то для функционала находим следующее представление:

$$J = \int_0^T dt \int_{\Omega} F \phi^* d\Omega$$

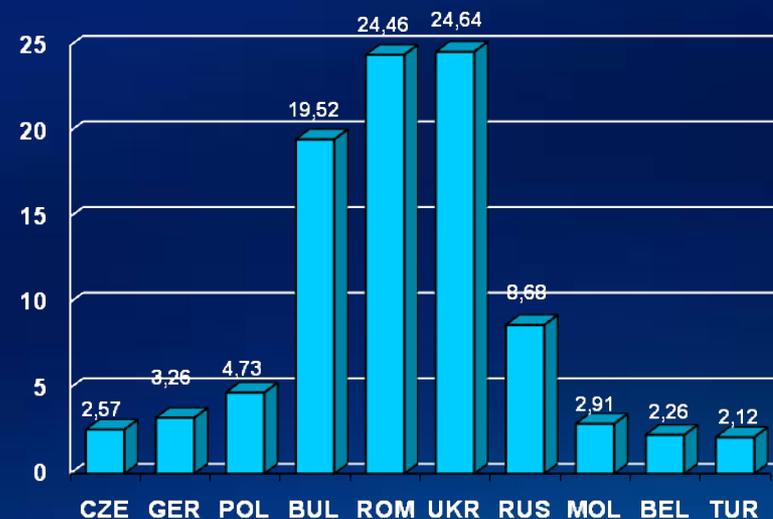
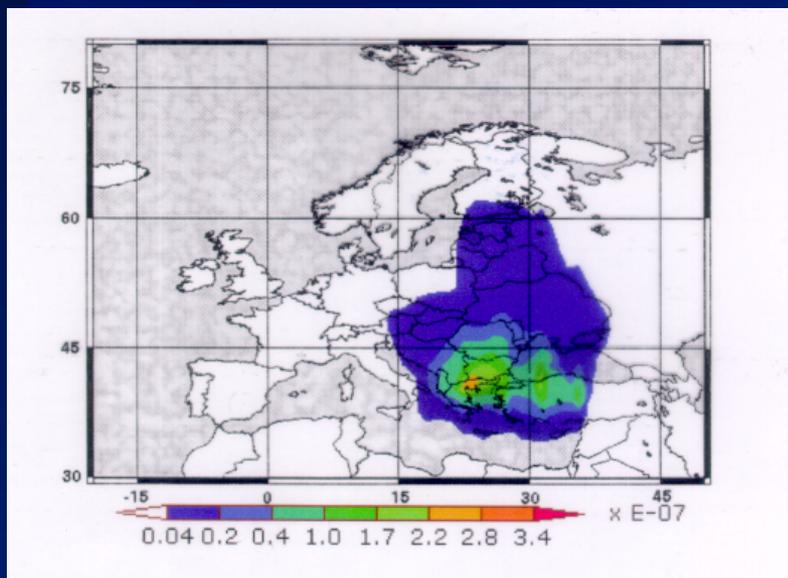
По значениям функции ϕ^* можно районировать область Ω , выделяя опасные зоны по отношению к загрязнению атмосферы в ω . Конструктивно это районирование определяется с помощью функции ϕ^* , нормированной на свое максимальное значение.

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ



Функция чувствительности. Охраняемая зона: Арктика.
Январь-февраль 1986 г. ($h = 1.5$ км).

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ



Охраняемая зона – акватория Черного моря.

Чувствительность охраняемой зоны к загрязнению в различных странах.

Пространственно-временная структура решений сопряженных задач дает информацию о том, какие зоны могут оказать то или иное влияние на загрязнение конкретного выбранного региона ω . Если в качестве исследуемых выбрать регионы отдельных государств, то на основе расчета сопряженных функций и функционалов можно оценить трансграничный перенос загрязнения области ω всеми другими регионами планеты.

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

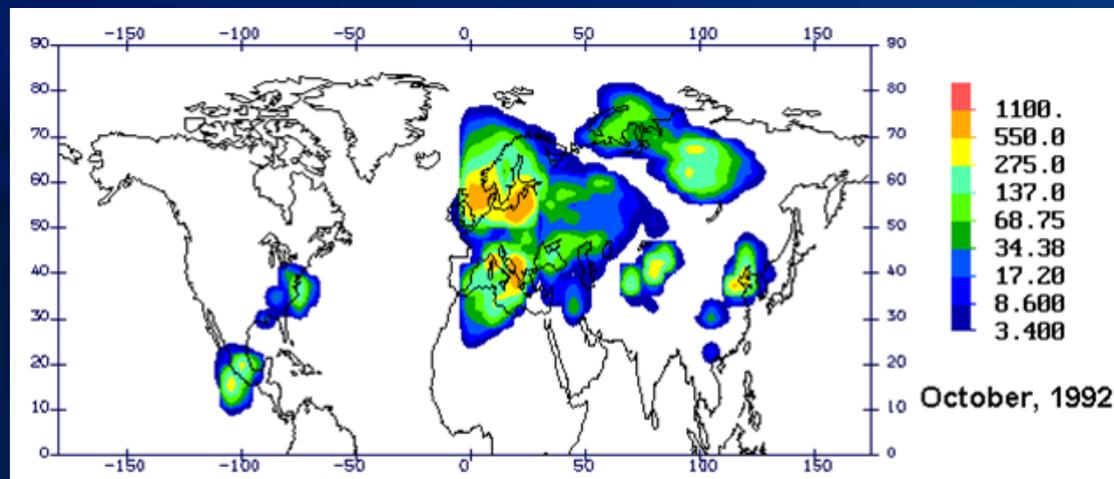
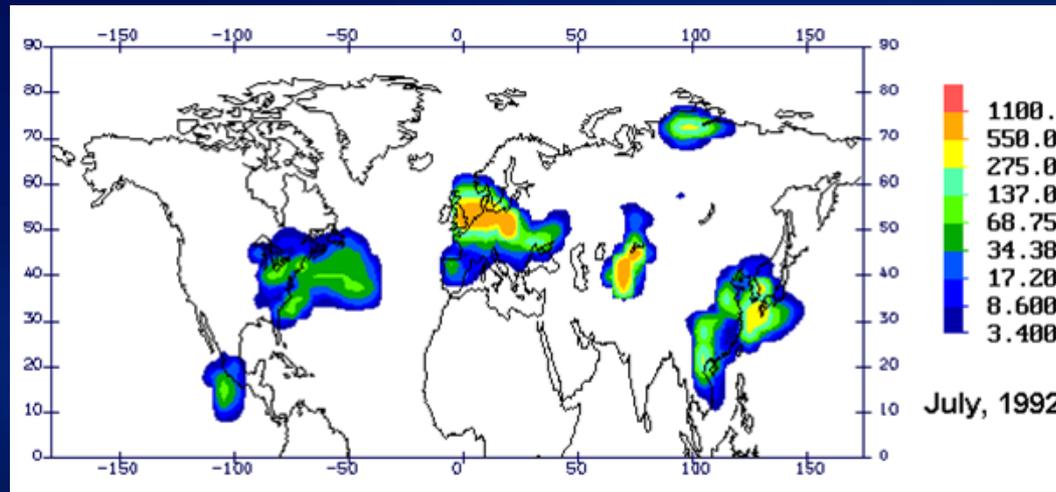
Глобальный перенос примеси в атмосфере

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial C_i}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial C_i}{\partial \psi} + w \frac{\partial C_i}{\partial z} = F_{gas} - P_{nucl} - P_{cond} + P_{phot} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial C_i}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial C_i}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial C_i}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \psi} \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \phi_k}{\partial \psi} + (w - w_g) \frac{\partial \phi_k}{\partial z} = F_{aer} + P_{cond} + P_{coag} + P_{nucl} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \phi_k}{\partial z} + \frac{1}{a^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mu \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \mu \sin \psi \frac{\partial \phi_k}{\partial \psi}$$

F_{gas} – выбросы газовых примесей, F_{aer} – выбросы аэрозольных частиц,
 P_{nucl} – нуклеация, P_{cond} – конденсация, P_{coag} – коагуляция, P_{phot} – химические процессы,
 C_i – концентрации газовых примесей ($i = 1, \dots, n$), ϕ_k – концентрации аэрозолей ($k = 1, \dots, m$).

ПРОБЛЕМЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ



Образование сульфатных аэрозольных частиц в атмосфере с учетом кинетических процессов трансформации ($r=0.11$ мкм, $z=1460$ м, $t=10$ дней)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА



ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ *

В работах [1, 2] метод дробных шагов (метод расщепления, метод слабой аппроксимации) использовался для исследования корректности задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Данная заметка посвящена доказательству существования гладкого решения смешанной задачи для одной квазилинейной системы уравнений. Эта задача является в некотором смысле (задача рассматривается в неограниченной по x, y области) модельной по отношению к задаче, используемой для краткосрочного прогноза погоды [3].

Задача А. Требуется определить функции u, v, H независимых переменных x, y, p, t , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv + \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu + \frac{\partial H}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p^2}{\partial p} \mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial p} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

при $t > 0, 0 < p_0 < p < P$, граничным условиям

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial p} = 0 & \text{при } p = p_0, \\ p \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha \frac{\partial H}{\partial t} = 0 & \text{при } p = P \end{cases} \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x, y, p, 0) &= u_0(x, y, p), \\ v(x, y, p, 0) &= v_0(x, y, p), \\ H(x, y, p, 0) &= H_0(x, y, p). \end{aligned} \quad (3)$$

Математическая геофизическая гидродинамика

Определение. Мы определим норму $U(t)$ в W_2^{m,k_0} следующим образом:

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{W_2^{m,k_0}}^2 = & \int_{S_t} \left\{ \sum_{m_1=0}^m \sum_{n+r=m_1} \left(\int_{p_0}^P \left[\left(\frac{\partial^{m_1} u}{\partial x^n \partial y^r} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & + \left. \left(\frac{\partial^{m_1} v}{\partial x^n \partial y^r} \right)^2 + \frac{p^2}{\mu} \left(\frac{\partial^{m_1+1} H}{\partial x^n \partial y^r \partial p} \right)^2 \right] dp + \frac{\alpha P}{\mu(P)} \left(\frac{\partial^{m_1} H(P)}{\partial x^n \partial y^r} \right)^2 \Bigg) + \\ & + \sum_{m_1=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq k_0 \\ n+r+k=m_1}} \int_{p_0}^P \left[\left(\frac{\partial^{m_1} u}{\partial x^n \partial y^r \partial p^k} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^{m_1+1} H}{\partial x^n \partial y^r \partial p^{k+1}} \right)^2 \right] dp \Bigg\} dx dy. \end{aligned}$$

Теорема. Если $l \in W_2^m(S_0)$, $\mu \in W_2^{k_0}(p_0, P)$, $\vec{U}(0) \in W_2^{m,k_0}(D_0)$ при $m \geq 3$, $k_0 \geq 2$, то существует $\delta > 0$, зависящее от $\|\vec{U}(0)\|_{W_2^{m,k_0}}$ такое, что при $0 < t < \delta$ задача А имеет решение $\vec{U}(t) \in W_2^{m,k_0}(D_t)$.

Математическая геофизическая гидродинамика

Задача A_τ . Вектор-функция $\vec{U}_\tau(t)$ непрерывна по t ; $\vec{U}_\tau(0) = \vec{U}(0)$; при $2(n-1)\tau < t \leq (2n-1)\tau$ (n — натуральное) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + 2\frac{\partial H_\tau}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v_\tau}{\partial t} + 2\frac{\partial H_\tau}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{1'}$$

$$2\left(\frac{\partial u_\tau}{\partial x} + \frac{\partial v_\tau}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{\mu} \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p \partial t} = 0$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p \partial t} &= 0 \quad \text{при } p = p_0, \\ p \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial p \partial t} + \alpha \frac{\partial H_\tau}{\partial t} &= 0 \quad \text{при } p = P;\end{aligned}\tag{2'}$$

при $(2n-1)\tau < t \leq 2n\tau$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + a_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial x} + b_\tau \frac{\partial u_\tau}{\partial y} - 2lv_\tau &= 0, \\ \frac{\partial v_\tau}{\partial t} + a_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial x} + b_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial y} + 2lu_\tau &= 0,\end{aligned}\tag{1''}$$

Математическая геофизическая гидродинамика

$$\frac{\partial^2 H_\tau}{\partial t \partial p} + a_\tau \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial x \partial p} + b_\tau \frac{\partial^2 H_\tau}{\partial y \partial p} = 0$$

и граничному условию

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad p = P, \quad (2'')$$

где

$$a_\tau \equiv 2u_t((2n-1)\tau), \quad b_\tau \equiv 2v_t((2n-1)\tau).$$

Решение задачи A_τ сводится к последовательному решению двух весьма простых задач A' и A'' (задачу A' можно, например, решить методом Фурье). Опираясь на теорему вложения С.Л. Соболева [7], можно показать, что обе эти задачи являются равномерно корректными в смысле определения [1] в $W_2^{m,k_0}(D_t)$.

Запас гладкости ($m \geq 3$, $k_0 \geq 2$) обеспечивает компактность множества $\{\vec{U}_\tau(t)\}$ при t меньше некоторого δ , определяемого начальными данными, и существование предельной вектор-функции $\vec{U}(t) \in W_2^{m,k_0}(D_t)$, являющейся пределом $\vec{U}_{\tau_k}(t)$ при $\tau_k \rightarrow 0$. Если подставить $\vec{U}_\tau(t)$ в уравнения системы (1) и граничные условия (2), то они будут удовлетворяться с точностью до правых частей, слабо аппроксимирующих нуль. Отсюда следует, что $\vec{U}(t)$ является решением задачи A , и, в силу единственности решения задачи A , следует, что $\vec{U}^\tau(t)$ сходится к $\vec{U}(t)$ при τ , стремящемся к нулю.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ БАРОКЛИННОГО ОКЕАНА ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ *

Изучается асимптотическая устойчивость состояния равновесия устойчиво стратифицированной жидкости. Получаются оценки на скорость затухания начальных возмущений под действием диссипативных факторов. Исследуется влияние граничных условий на скорость затухания.

В настоящее время при решении многих задач динамики океана используется принцип стационарирования [1–6], согласно которому при решении нестационарной задачи со стационарной или квазистационарной правой частью начальные возмущения затухают и решение выходит на установившийся режим. Настоящая работа посвящена качественному изучению и обоснованию принципа стационарирования в линейных задачах динамики бароклинного океана. Полученные результаты можно интерпретировать как доказательство асимптотической устойчивости состояния равновесия устойчиво стратифицированной жидкости при наличии диссипативных факторов.

*Изв. АН СССР. Сер.: Физика атмосферы и океана, 1980, Том 16, № 3, стр. 211–218. Совместно с М.А. Бубновым.

Заключение

Премия АН СССР им. А.А.Фридмана

Гос. премия Р.Ф.

Медаль им. Бьеркнеса (ЕГС)

Золотая медаль РАН им. Ломоносова

Гос. премия СССР

Премия им. Карпинского
(фонд А. Тепфера, Германия)



Спасибо за внимание!