

*О работах Г.И. Марчука в  
области динамики океана*

В. Б. Залесный

Институт вычислительной математики РАН

Томск, 20 июня 2015 г.

**Посвящается 90 – летию Гурия Ивановича Марчука,  
последнего президента Академии Наук СССР,  
основателя Института вычислительной математики  
РАН**



# Содержание

- **Приведение уравнений динамики океана к эволюционной форме. Выделение баротропной циркуляции**
- **Метод расщепления**
- **Представление оператора сложной системы в виде суммы неотрицательных операторов простой структуры**
- **Метод сопряженных уравнений**
- **Энерго-активные зоны океана**
- **Вариационная ассимиляция данных**
- **Численные модели, основанные на методах Г.И. Марчука: Мировой океан, Черное море, Балтийское море**

# Приведение уравнений динамики океана к эволюционной форме. Выделение баротропной циркуляции

- Приведение уравнений динамики океана к эволюционной форме.

Модели динамики океана основаны на «примитивных уравнениях» с учетом приближений несжимаемости и гидростатики. Марчук (1967, 1969) привел систему к эволюционному виду, исключив уравнения неразрывности и гидростатики. Это упрощает исследование математических свойств уравнений и построение алгоритмов их численного решения, включая схемы расщепления.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l v = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = g \rho,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + l u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l v = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + l u = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\bar{\rho}}{g \Gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + \bar{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

# Спектральная задача по вертикали

Марчук, ДАН СССР, 1967

$$-\frac{d}{dz} \frac{\bar{\rho}}{g\Gamma} \frac{d\psi}{dz} = \lambda\psi$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\Gamma} \frac{d\psi}{dz} - \psi = 0, \quad z = 0$$

$$\frac{\bar{\rho}}{\Gamma} \frac{d\psi}{dz} = 0, \quad z = H$$

# Горизонтальная структура, характерные масштабы циркуляции

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - l v_k = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_k}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + l u_k = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_k}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_k p_k + \bar{\rho} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) = 0$$

$$T_k = \frac{1}{l}$$

$$L_k = \frac{C_k}{l}$$

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$$

# Переменная глубина

Сигма-система координат,  $H=H(x)$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\rho_0}{g H^2 \Gamma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{H_x}{H} \sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) u + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} \approx -\frac{1}{l \rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial \sigma}, \quad \begin{pmatrix} p_{\omega,n} \\ u_{\omega,n} \\ v_{\omega,n} \end{pmatrix} = \sum_k \exp[-i(\omega t - n y)] \begin{pmatrix} p_k(t, x) \\ u_k(t, x) \\ v_k(t, x) \end{pmatrix} \psi_k(\sigma)$$

## Спектральная задача, $H=H(x)$

$$-\frac{d^2 \psi_k}{d\sigma^2} + \gamma \cdot \sigma \frac{d\psi_k}{d\sigma} = \frac{g\Gamma H^2}{\rho_0} \lambda_k \psi_k,$$

$$\frac{d\psi_k(0)}{d\sigma} - \frac{\Gamma H}{\rho_0} \psi_k(0) = 0, \quad \frac{d\psi_k(1)}{d\sigma} = 0$$

$$\gamma = \frac{(H^2)_x N^2 T}{2l L_y}, \quad N^2 = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$$



# Оценка масштабов, Черное море

$$\lambda_0 \approx \frac{\varepsilon \rho_0}{g \Gamma H^2} = \frac{1}{g H} \quad \lambda_k \approx \frac{(k \pi)^2 \rho_0}{g \Gamma H^2} [1 + O(\varepsilon)] \quad \varepsilon = \frac{\Gamma H}{\rho_0}$$

$$3 \cdot 10^3 < H < 10^5 \text{ см}^2$$

$$T_k = \frac{1}{l} \quad L_k = \frac{C_k}{l} \quad C_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$$

$$L_k = \frac{1}{l \sqrt{\lambda_k}}, \quad Ro = \begin{cases} 1 \text{ км} & \text{у берега} \\ 30 \text{ км} & \text{в море} \end{cases}$$

$$L_k = \frac{1}{l \sqrt{\lambda_k}}$$

# Выделение баротропной циркуляции. Однозначная разрешимость линейной задачи

Марчук, Бубнов, ДАН СССР, 1979

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_0^\sigma \left( H \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sigma \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \mu \Delta u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu = g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \int_0^\sigma \left( H \frac{\partial \rho}{\partial y} - \sigma \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \mu \Delta v$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \int_0^1 \left( \frac{\partial u H}{\partial x} + \frac{\partial v H}{\partial y} \right) = \varepsilon \Delta \xi, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma H \int_\sigma^1 \left( \frac{\partial u H}{\partial x} + \frac{\partial v H}{\partial y} \right) + \Gamma H \sigma \left( u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} v_1 \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} + \mu_1 \Delta \rho$$

## Задача Пуанкаре

Марчук, ДАН СССР, 1969

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l v = g \frac{\partial \xi}{\partial x} - R u + f_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + l u = g \frac{\partial \xi}{\partial y} - R v + f_2, \quad \text{в } D_T = D \times (0, T]$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u H}{\partial x} + \frac{\partial v H}{\partial y} = 0, \quad (\vec{u}, \vec{n}) = 0 \quad \text{на } \partial D_T$$

$$(u, v, \xi) = (u^0, v^0, \xi^0) \quad \text{при } t = 0$$

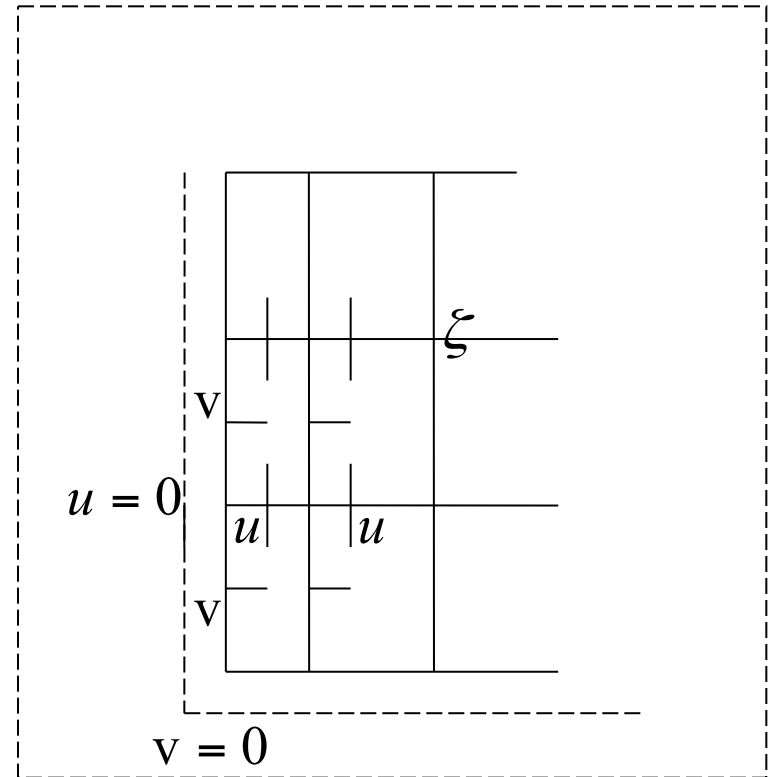
# Аппроксимация: МКР, МКЭ. Закон сохранения и потеря локальности. Диагонализация.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l v - g \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + l u - g \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad (\vec{u}, \vec{n})|_{\partial D} = 0$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} + \frac{\partial H v}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + l^2 v - g \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} - l \frac{\partial}{\partial x} \right) \xi = 0 \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} g H \frac{\partial \xi}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} l \right) H v = 0 \end{cases}$$



# Метод расщепления

(Марчук , Яненко, Самарский, Белоцерковский, др)

- **Методология решения сложных задач и построения моделей сложных гидро- экосистем. Эволюционная форма уравнений. Многокомпонентное расщепление: по физическим процессам, геометрическим переменным и т.д.**
- **Расщепление на подсистемы с неотрицательными операторами. Сохранение энергетических характеристик**
- **Симметризованная форма уравнений**
- **Отдельная подсистема имеет свой сопряженный аналог. Сопряженная модель – совокупность сопряженных подсистем**
- **Неявные схемы, аналитические решения, регуляризация подсистем**

# Метод расщепления – как методология численного решения прямых и обратных задач

- Устойчивые неявные алгоритмы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (A_1 \varphi + A_2 \varphi + \dots + A_n \varphi) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad A_i \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi^{j+1/n}}{\partial t} + A_1 \varphi^{j+1/n} = 0, \quad \varphi^{j+1/n} = \varphi^0 \\ \hline \frac{\partial \varphi^{j+1}}{\partial t} + A_n \varphi^{j+1} = 0, \quad \varphi^{j+1} = \varphi^{j+(n-1)/n} \end{array} \right.$$

$$A_i \geq 0 !$$

# **Метод сопряженных уравнений. Вариационная ассимиляция данных наблюдений (4D VAR)**

- **Теория и методы: Понтрягин и др. (1961), Lions (1968)**
- **Марчук (1961, 1964, 1974), Марчук, Скиба (1976), Марчук, Пененко (1978)**

## **Программа Разрезы**

- **Агошков, Залесный, Шутяев, Пармузин, Ипатова и др. (1991-2015)**

# Метод вариационной инициализации (Марчук, Агошков, Шутяев, Пармузин, Залесный, 1995-2015)

$$\begin{aligned}
 J = & \underbrace{\frac{1}{\Sigma_0} \int_{\Sigma_0} \alpha^0 (\varphi^0 - \varphi_{data}^0)^2 d\Sigma_0 + \frac{1}{\Sigma_1} \int_{\Sigma_1} \beta^0 (\varphi^0 - \varphi_{model}^0)^2 d\Sigma_1}_{3D-VAR} + \\
 & \underbrace{\frac{1}{(\bar{t} - \tau)} \int_{\tau}^{\bar{t}} \frac{1}{\Sigma_2} \int_{\Sigma_2} \alpha (\varphi - \varphi_{data})^2 d\Sigma_2 dt}_{4D-VAR}
 \end{aligned}$$

$$\varphi \in \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A(\varphi) = f \\ \varphi^0 \in R_N \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A'^*(\varphi^*) + \tilde{\alpha}(\varphi - \varphi_{data}) = 0 \\ \varphi^*(\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

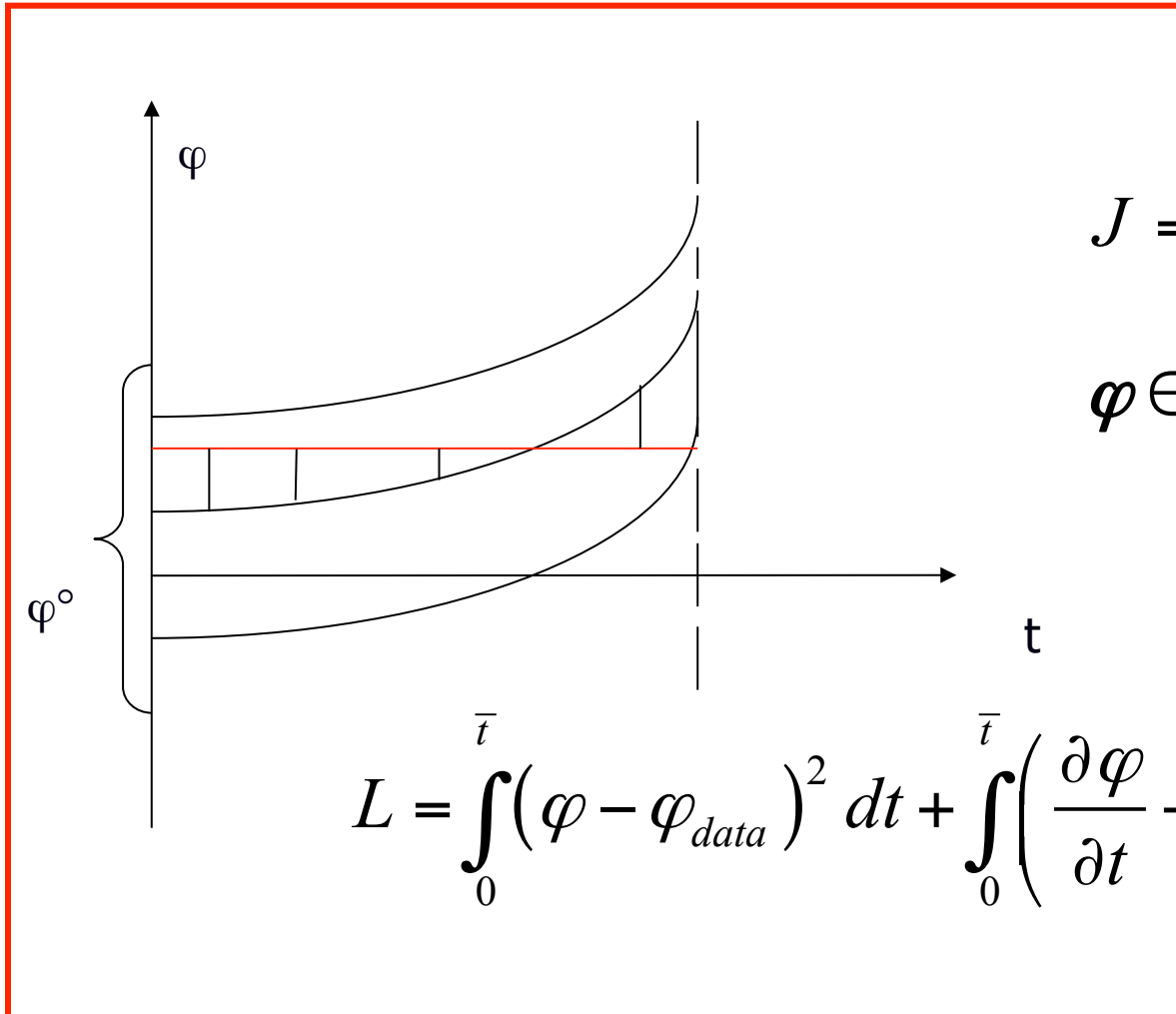
$$grad J = -\varphi^*(0) + \tilde{\beta}(\varphi^0 - \varphi_{model}^0)$$



# Задача инициализации

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi - f = 0$$

$$\varphi(0) = ?$$



$$J = \int_0^{\bar{t}} (\varphi - \varphi_{data})^2 dt \rightarrow \min$$

$$\varphi \in \Phi$$

$$L = \int_0^{\bar{t}} (\varphi - \varphi_{data})^2 dt + \int_0^{\bar{t}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi - f, \varphi^* \right) dt \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^*} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

# Пример нелинейной системы оптимальности.

## Краевая задача в $[0, t] \times \Omega$

$$v - v \left( \frac{\partial \rho(T)}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial T^*}{\partial z} + \alpha (T - \hat{T}) = -\frac{\partial \rho(T)}{\partial T} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (v' \cdot v^*),$$

$$v^* + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial T^*}{\partial z} = 0$$

$$T^* = 0, \quad \text{при} \quad t = t_1, \quad t = t_0.$$

## Линейная 4-х мерная задача в терминах сопряженной функции

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) \alpha^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + A^*\right) \varphi^* = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) \varphi_{data}$$

$$\varphi^* = 0, \quad \text{при } t = t_0, \quad t = t_1$$

# Линейная 4-х мерная задача в терминах сопряженной функции. Схема по времени

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + A_1 \varphi^{j+1} + A_0 \varphi^j = 0$$

$$\begin{aligned} & (E + \tau A_1)(E - \tau A_0) \varphi^{*j-1} - \left[ (E + \tau A_1)^2 + (E - \tau A_0)^2 \right] \varphi^{*j} + \\ & + (E + \tau A_1)(E - \tau A_0) \varphi^{*j+1} = f \end{aligned}$$

# Разностные краевые задачи в терминах сопряженной функции

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} - A A^* \varphi^* + (A - A^*) \varphi^* = f$$

Неявная схема

$$\left[ E + \frac{\tau}{2} (A + A^*) \right] \frac{\varphi^{*j+1} - 2\varphi^{*j} + \varphi^{*j-1}}{\tau^2} - A A^* \varphi^{*j} + (A - A^*) \frac{\varphi^{*j+1} - \varphi^{*j-1}}{2\tau} = f$$

Явная схема

$$\left[ E - \frac{\tau}{2} (A + A^*) \right] \frac{\varphi^{*j+1} - 2\varphi^{*j} + \varphi^{*j-1}}{\tau^2} - A A^* \varphi^{*j} + (A - A^*) \frac{\varphi^{*j+1} - \varphi^{*j-1}}{2\tau} = f$$

# Численные модели, основанные на методах Г.И. Марчука. Модели ИВМ РАН

- $\sigma$ -система координат, ортогональные сетки со сгущением
- Эволюционная формулировка, симметризация уравнений
- Выделение энергетически сбалансированных подсистем,  $\varepsilon$ -регуляризация подсистем (модуль негидростатической динамики)
- Комбинация методов расщепления и сопряженных уравнений

**Уравнения динамики океана в  $\sigma$ -системе:**  $\sigma = \frac{Z - \xi}{H - \xi}$

$$\frac{du}{dt} - lv = -\frac{1}{\rho_0 r_x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0 r_x} \frac{\partial Z}{\partial x} \rho + \Lambda_u u$$

$$\frac{dv}{dt} + lu = -\frac{1}{\rho_0 r_y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0 r_y} \frac{\partial Z}{\partial y} \rho + \Lambda_v v$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = g Z_\sigma \rho$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Z_\sigma r_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (Z_\sigma r_x v) \right] + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0$$

$$\frac{d}{dt} (Z_\sigma T) = \Lambda_T T \quad \frac{d}{dt} (Z_\sigma S) = \Lambda_S S$$

$$\rho = \rho(T, S, Z)$$

# Закон сохранения полной энергии

- Пусть отсутствуют внешние и внутренние источники и стоки. Тогда можно получить закон сохранения полной энергии, умножая скалярно уравнения модели на вектор

$$(\rho_0 u, \rho_0 v, \omega, p, -gZ)$$

- Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{\rho_0}{2} Z_{\sigma} (u^2 + v^2) d\Sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} gZ_{\sigma} Z\rho d\Sigma = 0$$



# Симметризованная форма уравнений

$$\frac{du}{dt} - \tilde{l}v = -\frac{1}{\rho_0 r_x} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \underbrace{\frac{g}{2\rho_0 r_x} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)}_1 + \Lambda_u u$$

$$\frac{dv}{dt} + \tilde{l}u = -\frac{1}{\rho_0 r_y} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \underbrace{\frac{g}{2\rho_0 r_y} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)}_2 + \Lambda_v v$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \sigma} = \underbrace{\frac{g}{2} \left( \rho \frac{\partial Z}{\partial \sigma} - Z \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right)}_3$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (Dr_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (Dr_x v) \right] + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0$$

$$D \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r_y r_x} \frac{\partial}{\partial x} (Dur_y \rho)}_1 + \frac{Du}{r_x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (Dvr_x \rho)}_2 + \frac{Dv}{r_y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega \rho T)}_3 + \omega \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right\} = \Lambda \rho$$

# Метод расщепления. Выделение подсистемы негидростатической динамики

$$\frac{d u}{d t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

$$\frac{d v}{d t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$$

$$\frac{d w}{d t} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - g\rho \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - g\rho \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tilde{p} - \left( p_{atm} - g\rho_0 \xi + g \int_0^z \rho dz_1 \right) \right]$$

$$p(t, x, y, z) = \tilde{p}(t, x, y, z) - \underbrace{\left[ p_{atm} - g\rho_0 \xi(t, x, y) + g \int_0^z \rho(t, x, y, z_1) dz_1 \right]}_{p_g}$$

# Введем $\sigma$ - координату и $\varepsilon$ - регуляризацию

$$Z_\sigma \frac{\partial u}{\partial t} = g \underbrace{Z_\sigma \frac{\partial \xi}{\partial x}}_1 - \frac{1}{\rho_0} \underbrace{Z_\sigma \frac{\partial p}{\partial x}}_4 + \frac{1}{\rho_0} \underbrace{Z_x \frac{\partial p}{\partial \sigma}}_4 + f_1$$

$$Z_\sigma \frac{\partial v}{\partial t} = g \underbrace{Z_\sigma \frac{\partial \xi}{\partial y}}_2 - \frac{1}{\rho_0} \underbrace{Z_\sigma \frac{\partial p}{\partial y}}_5 + \frac{1}{\rho_0} \underbrace{Z_y \frac{\partial p}{\partial \sigma}}_5 + f_2$$

$$Z_\sigma \frac{\partial w}{\partial t} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \sigma}}_3$$

$$\varepsilon Z_\sigma \frac{\partial (p - \bar{p})}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_6 + \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (Z_\sigma u)}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (Z_\sigma v)}_2 \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \underbrace{w}_3 - \left( \underbrace{\frac{\partial Z}{\partial t}}_6 + \underbrace{Z_x u}_4 + \underbrace{Z_y v}_5 \right) \right] = 0.$$

# Подсистема негидростатической динамики по вертикальной координате

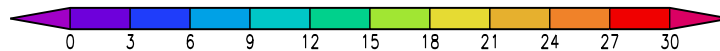
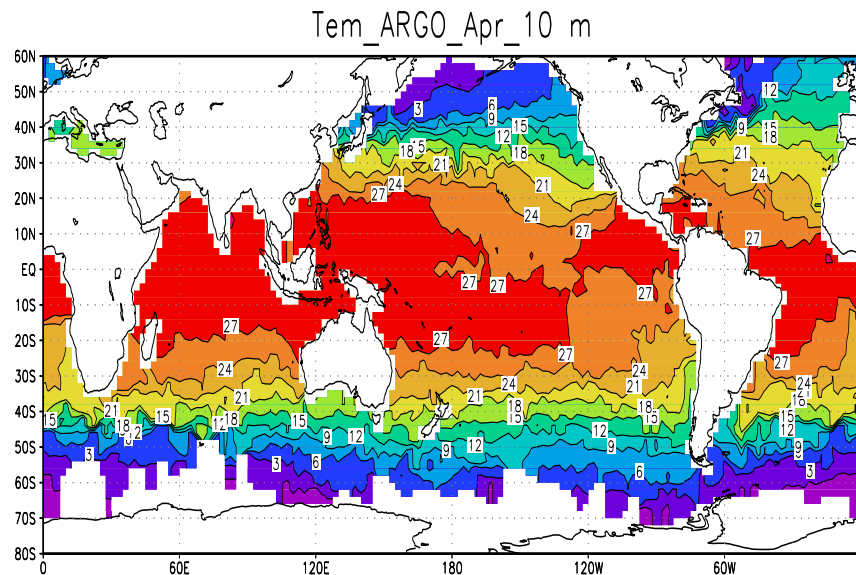
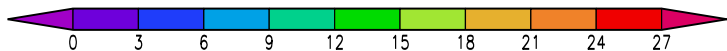
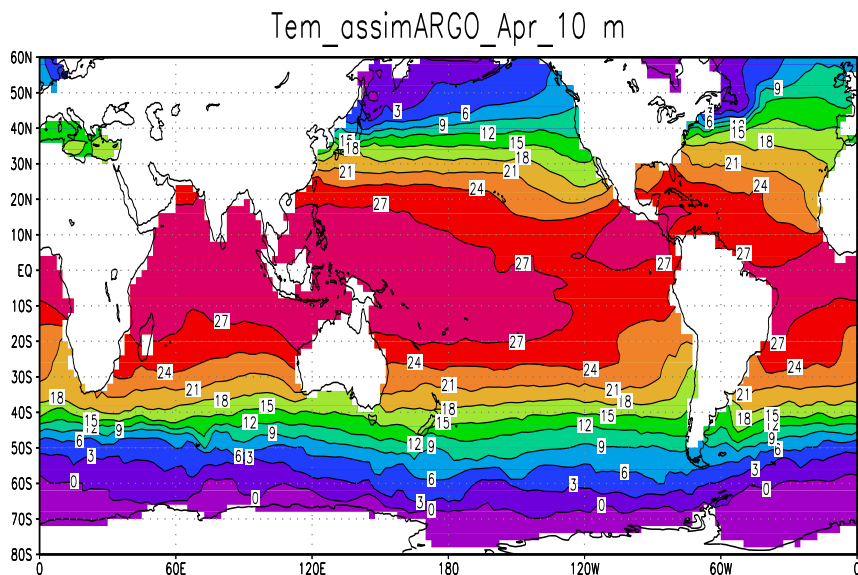
$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma} \left[ \underbrace{Z_x \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial \sigma}}_1 - \int_0^1 \left( Z_x \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial \sigma} \right) d\sigma \right]$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 Z_\sigma} \left[ \underbrace{Z_y \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial \sigma}}_2 - \int_0^1 \left( Z_y \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial \sigma} \right) d\sigma \right]$$

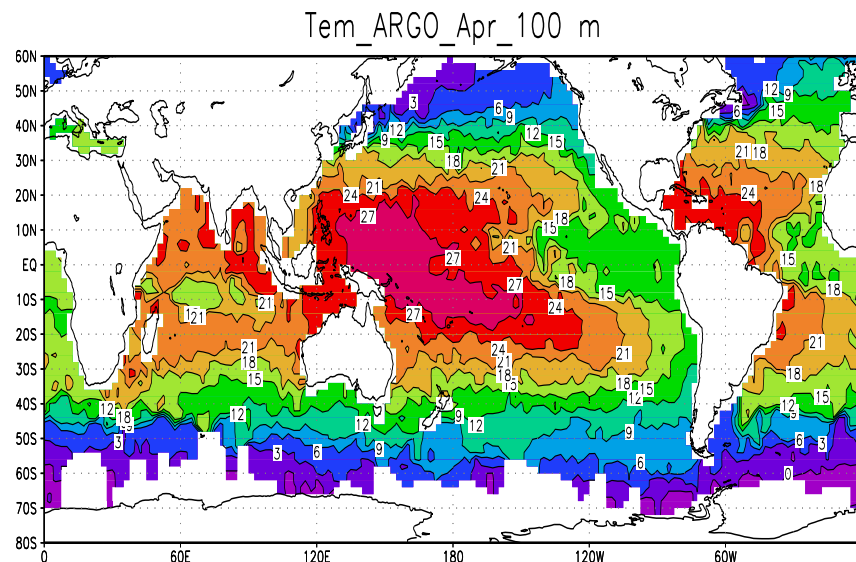
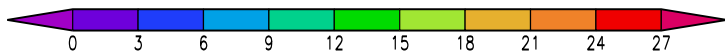
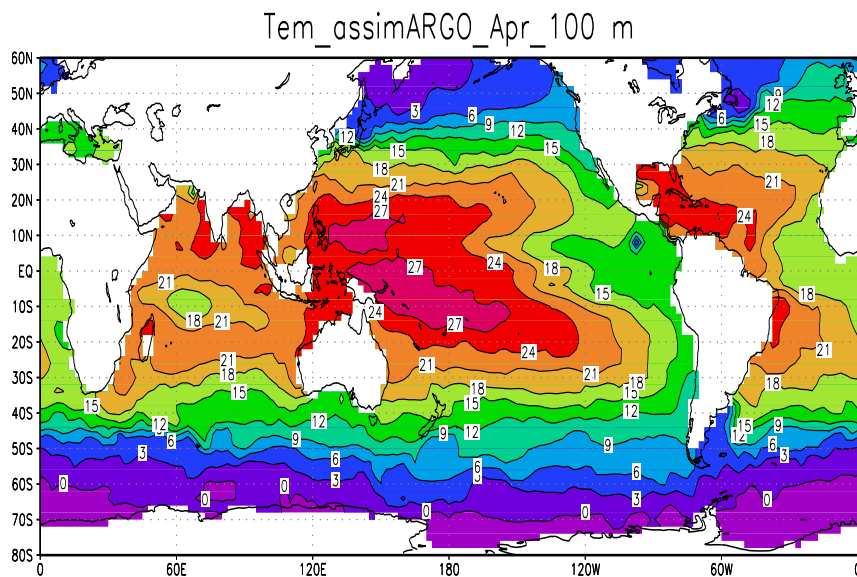
$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \underbrace{\frac{1}{\rho_0 Z_\sigma} \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial \sigma}}_3 = 0$$

$$\varepsilon Z_\sigma \frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \underbrace{w}_3 - \left( Z_t + \underbrace{u Z_x}_1 + \underbrace{v Z_y}_2 \right) \right] = 0.$$

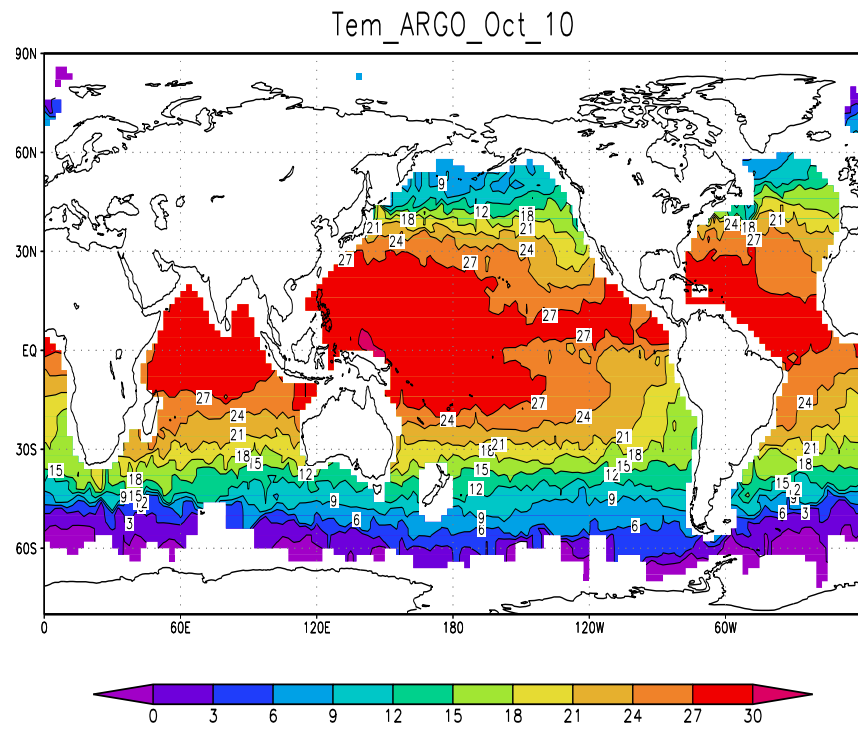
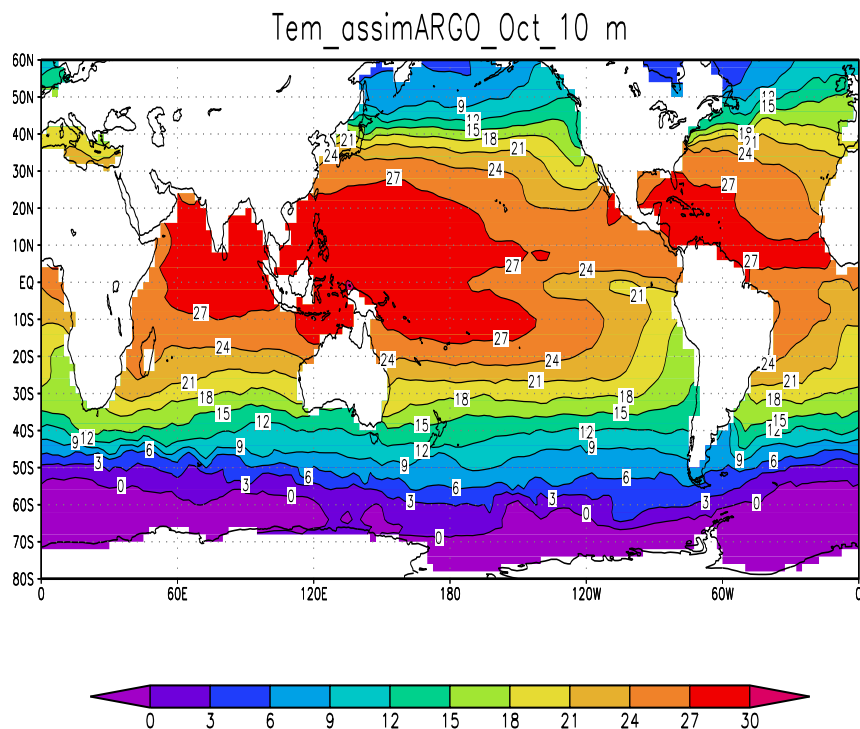
# 4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 10 м, апрель 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)



# 4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 100 м, апрель 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)

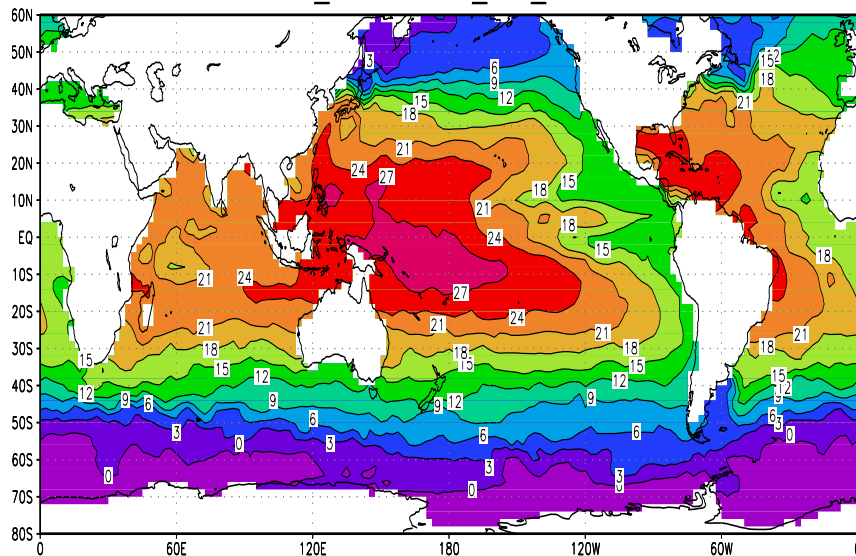


# 4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 10 м, октябрь 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)

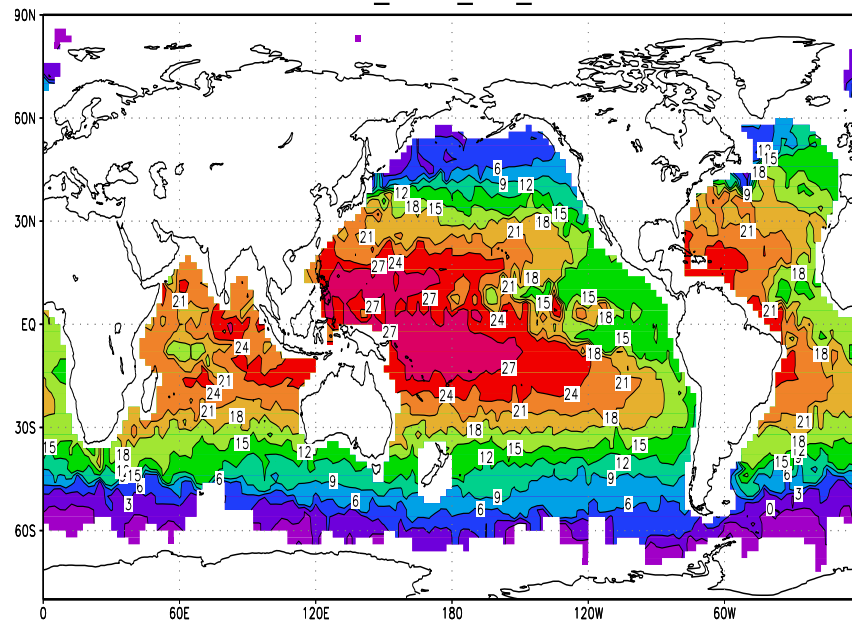


# 4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура на уровне 100 м, октябрь 2008: оптимальное решение (слева), данные АРГО (справа)

Tem\_assimARGO\_Oct\_100 m



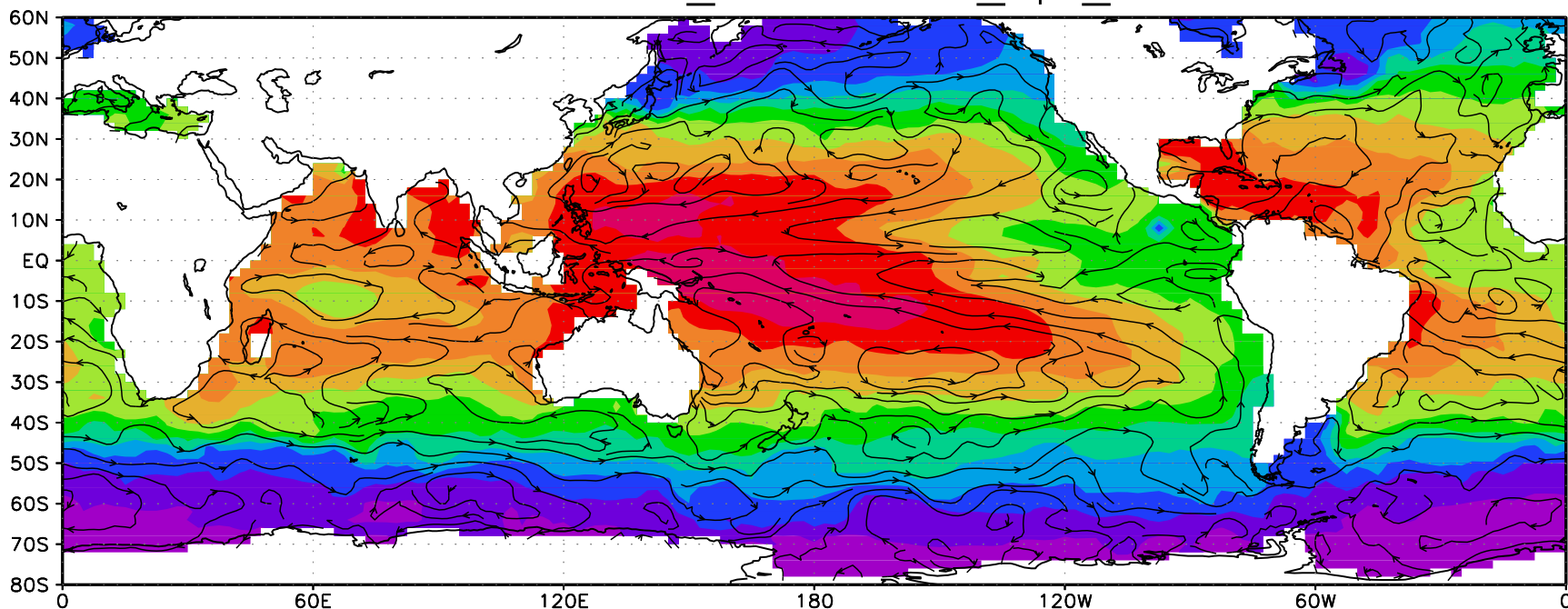
Tem\_ARGO\_Oct\_100



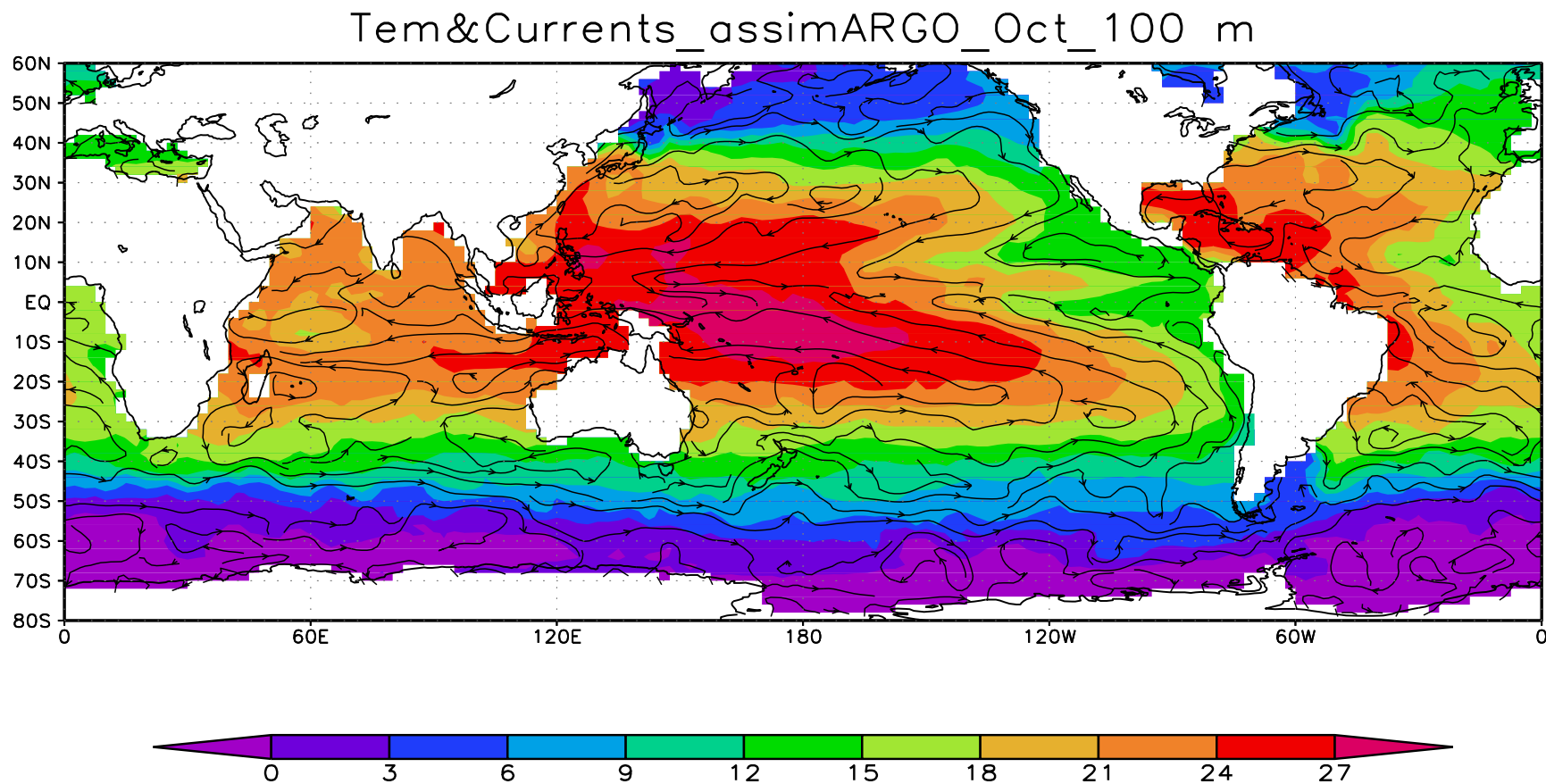


# 4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура и течения на уровне 100 м, апрель 2008

Tem&Currents\_assimARGO\_Apr\_100 m



# 4-х мерная вариационная инициализация Мирового океана. Температура и течения на уровне 100 м, октябрь 2008



# Проект. Черное море как имитационная модель океана

Руководители проекта:  
Г.И. Марчук, Б.Е. Патон  
2011-2014 гг

Москва, 22 января 2015 г.

# Основная задача

- Внедрение современных достижений в области математического моделирования морской динамики, методов ассимиляции данных наблюдений, океанологического приборостроения, организации морских наблюдательных систем для создания информационно-вычислительной системы моделирования и прогноза морской динамики и экосистемы

# Цель проекта

- Разработка информационно - вычислительной системы мониторинга и прогноза Черного моря, как имитационной системы глобальной гидросферы
- Воспроизведение и анализ 4-х мерной пространственно-временной структуры гидрофизических и экологических полей

# Черноморский полигон ИО РАН

- Модель гидродинамики Черного моря  $\approx 4.5$  км с высоким разрешением прибрежной зоны  $\approx 150$  м
- Воспроизведение циркуляции и анализ субмезомасштабной изменчивости гидрофизических полей

# Модель Черного моря с улучшенным разрешением прибрежной зоны

- Система координат: сферическая, ортогональная, с произвольным положением полюсов,  $\sigma$ -координата (Гусев, Дианский, Фомин, 2012-1014)
- «Примитивные» уравнения ОЦО:  $H \ll L$ , гидростатика, свободная поверхность, ...
- Включает алгоритмы 4-х мерной вариационной ассимиляции (Агошков и др., 2012-2015)

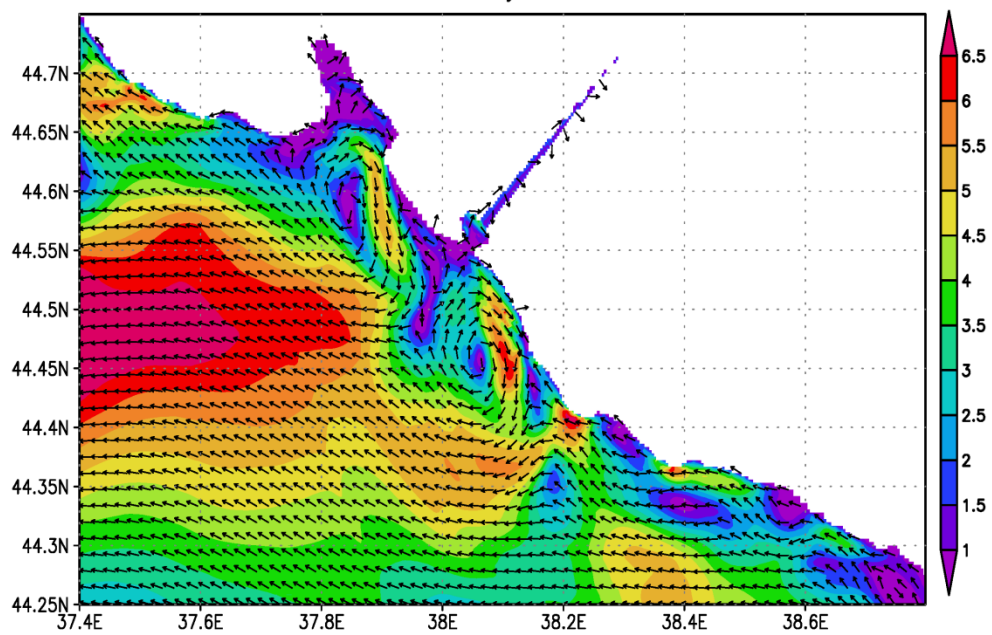
# Параметры

- Криволинейная ортогональная  $\sigma$ -система, северный полюс в (38.35 в.д., 44.75 с.ш.)
- Шаги сетки:  $\Delta x \approx \Delta y$ , от 150 м у Полигона, до 4.6 км на западе, 25 уровней по  $\sigma$ , точек сетки  $560 \times 660 \times 25$ , шаг по  $t = 1.5$  мин
- Рельеф дна: GEBCO,  $H_{\min} = 1$  м, атмосферное воздействие: ERA-Interim, 2007 г, 6-12 час.
- $\mu = 10^5$ ,  $\mu[T, S] = 10^6$
- $\nu = 1-5$ ,  $\nu[T, S] = 0.1-5$  (см<sup>2</sup>/с)

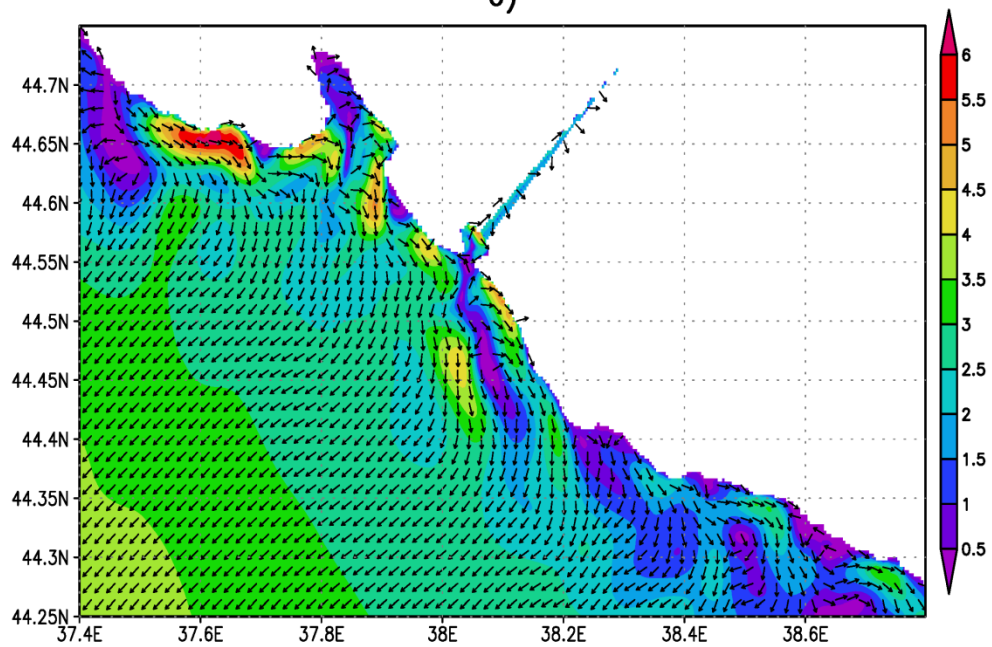


**Динамика прибрежной зоны**

**ХАРАКТЕРНЫЕ ЭПИЗОДЫ**



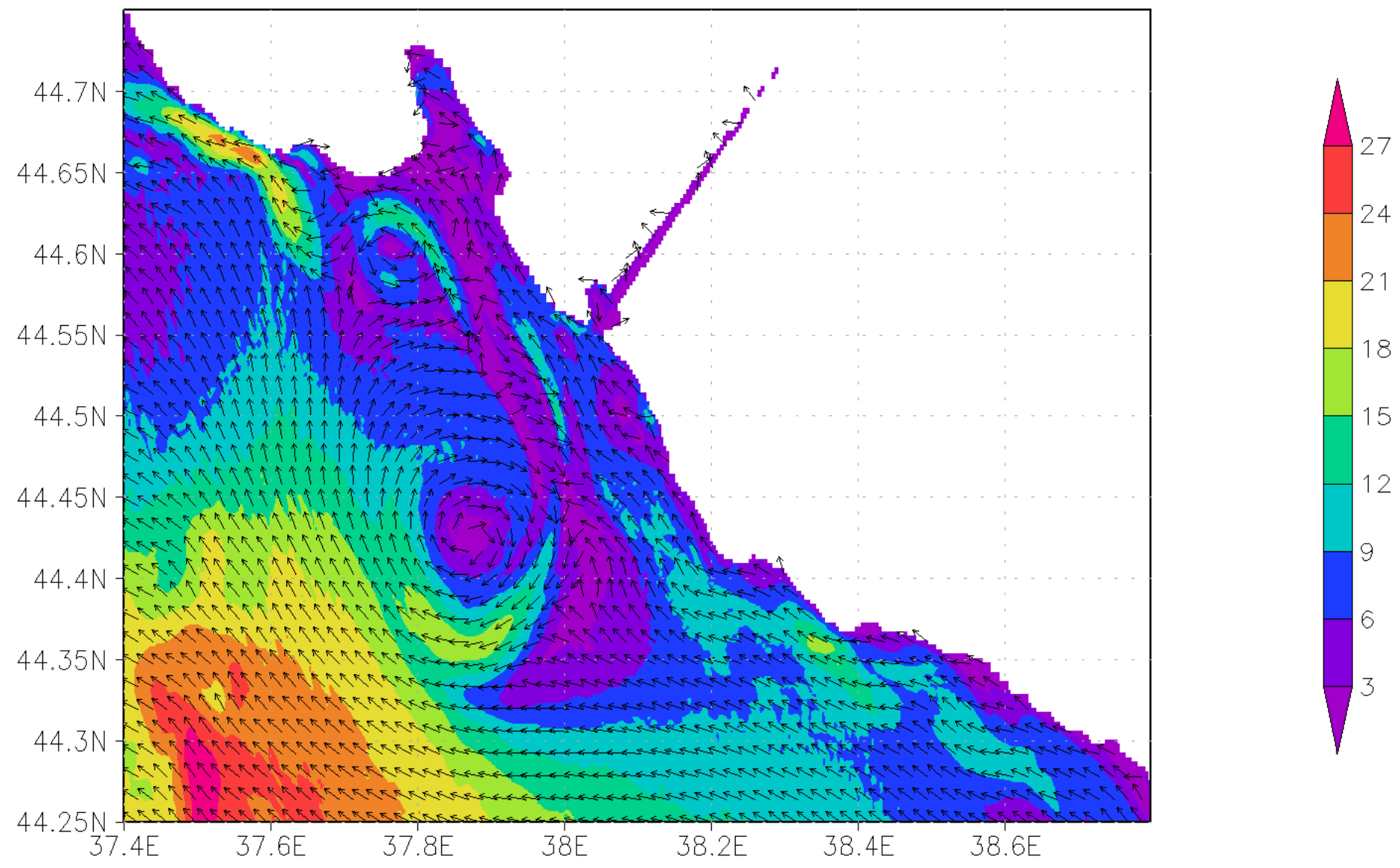
б)



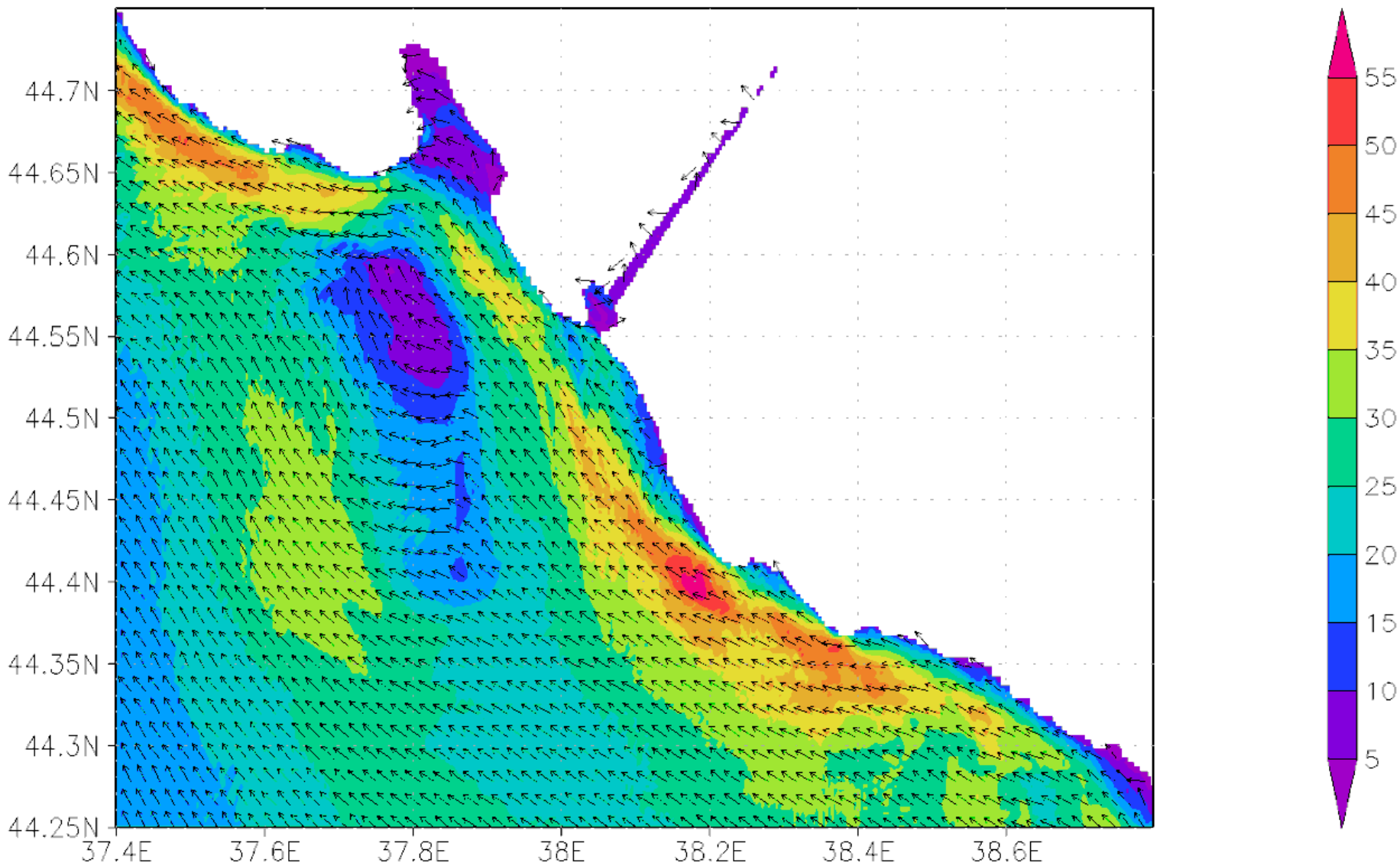
**191-е сутки. (а) бароклинная модель, (б) баротропная**

37.9E 38E 38.1E 37.9E 38E 38.1E

# UV 0-20m on day 343

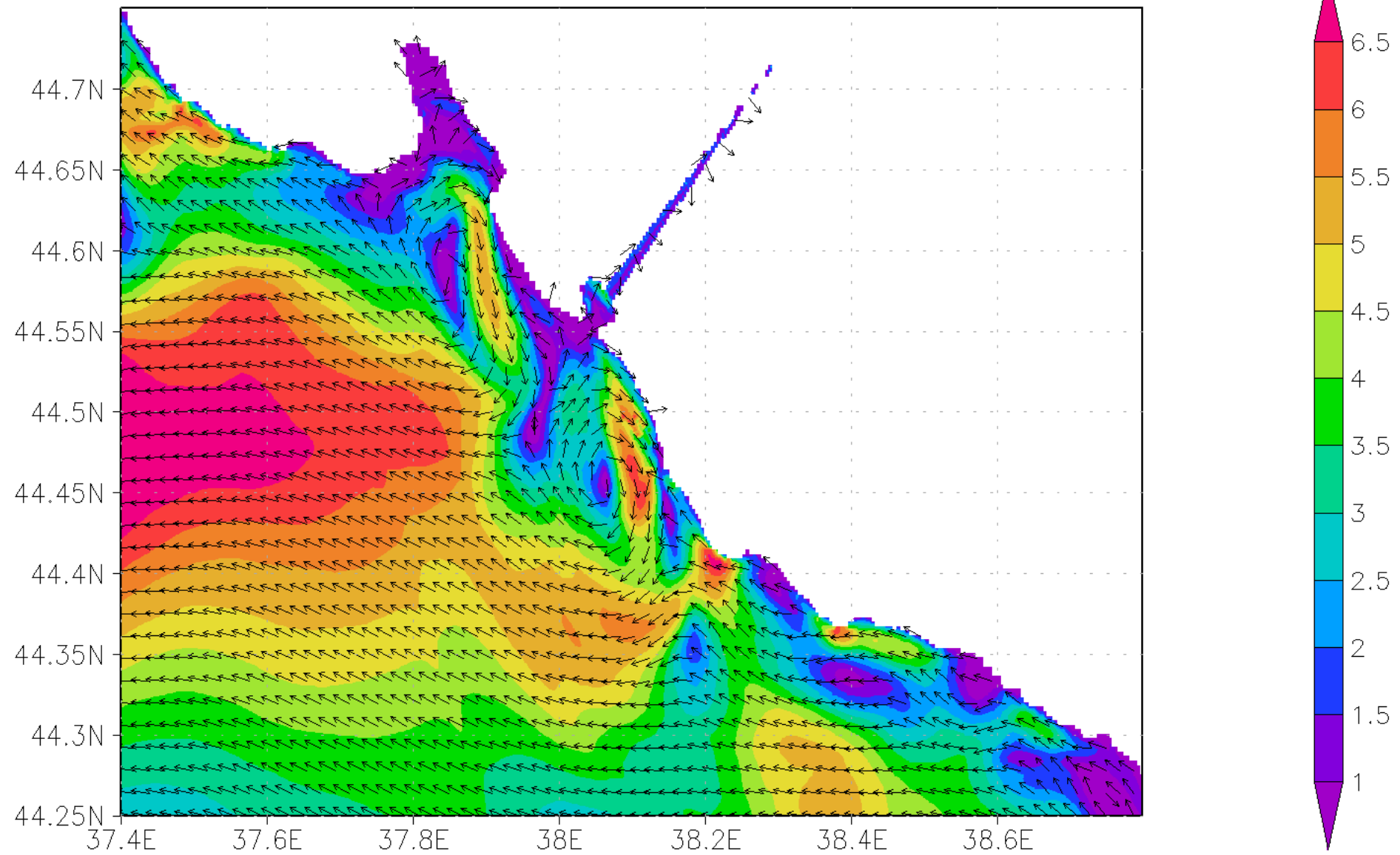


# UV 0–20m on day 330



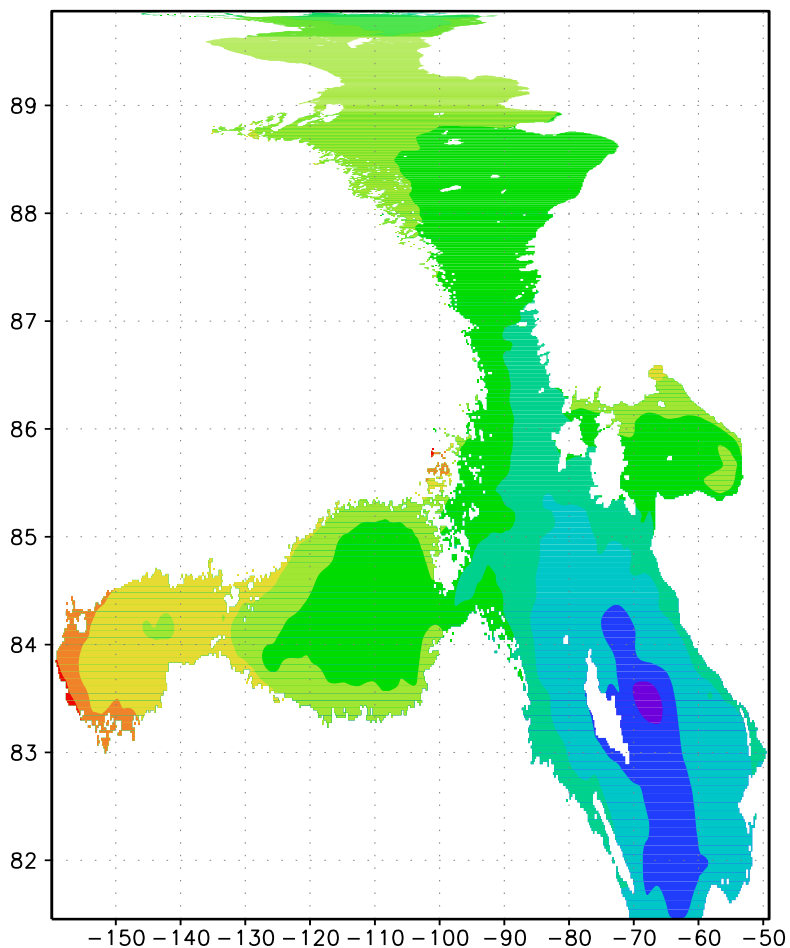
**330-е сутки. Сильное течение у Полигона**

# UV 0-20m on day 191

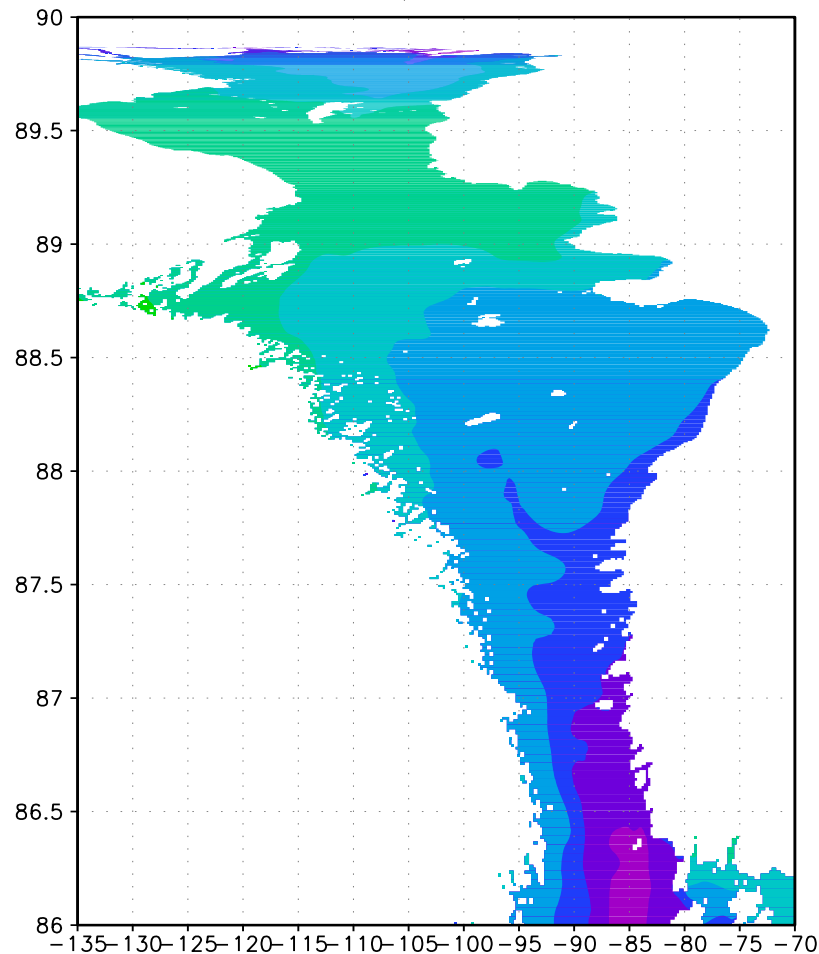


# Модель Балтики, «полюс» у Петербурга. Уровень моря, март. Справа – Финский залив

SSH March mean, cm. Baltic Sea.



SSH March mean, cm. Gulf of Finland.



# Балтийское море. Загрязнение пассивной примесью. Сопряженная задача

$$H \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial x} (H r_y u \varphi) + \frac{H u}{r_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r_x r_y} \frac{\partial}{\partial y} (H r_x v \varphi) + \frac{H v}{r_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\omega \varphi) + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right] -$$

$$- \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \Lambda_{x,y} \varphi = 0$$

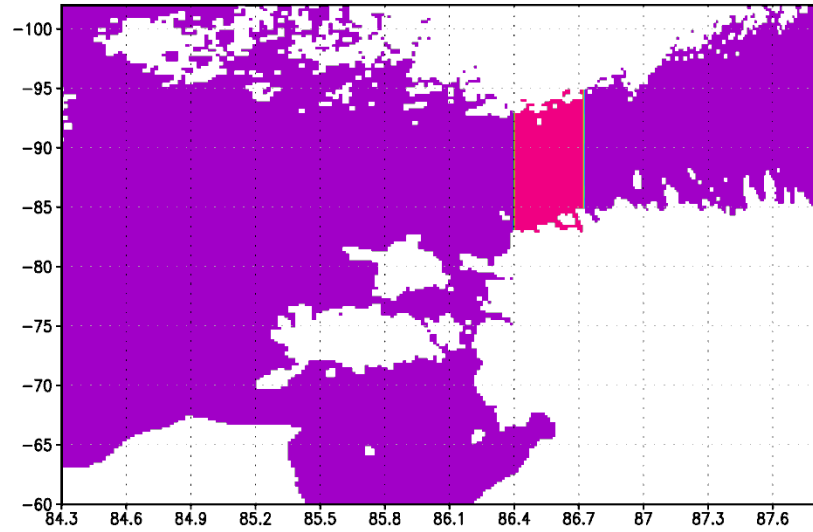
$$v \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = Q \quad \sigma = 0$$

$$v \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = 0 \quad \sigma = 1$$

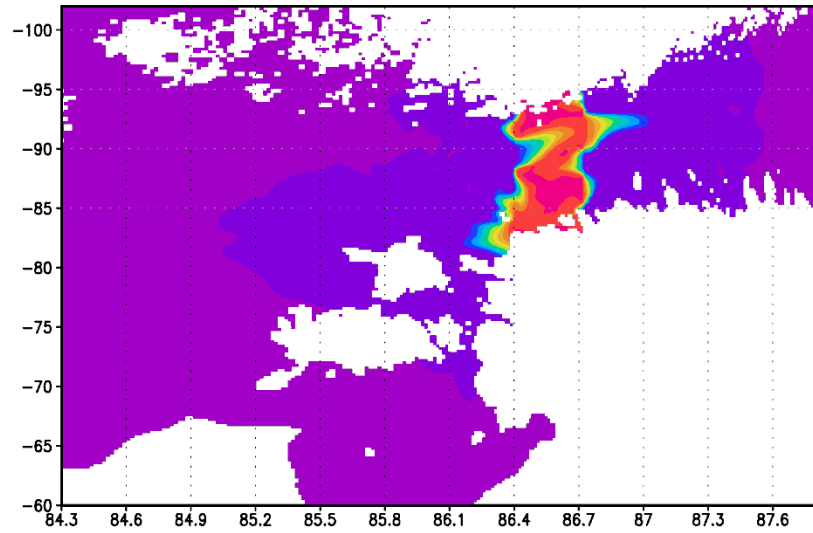
$$J = \int_0^T \int_D \varphi(x, y, \sigma, t) \eta(x, y, \sigma, t) dD dt$$

$$J = \int_0^T \int_{D_0} \varphi^*(x, y, \sigma, t) Q(x, y, t) dD_0 dt + \int_D \varphi^0 \varphi^{*0} dD$$

Inverse problem solution, 0 days

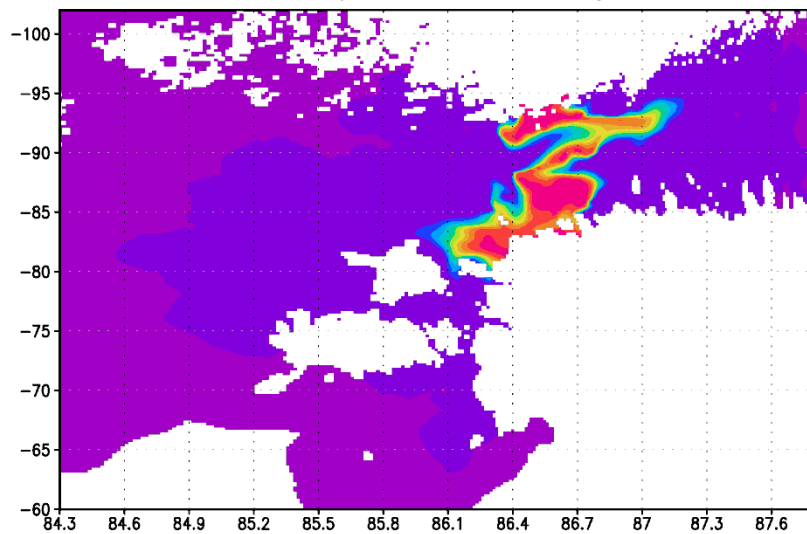


Inverse problem solution, 5 days

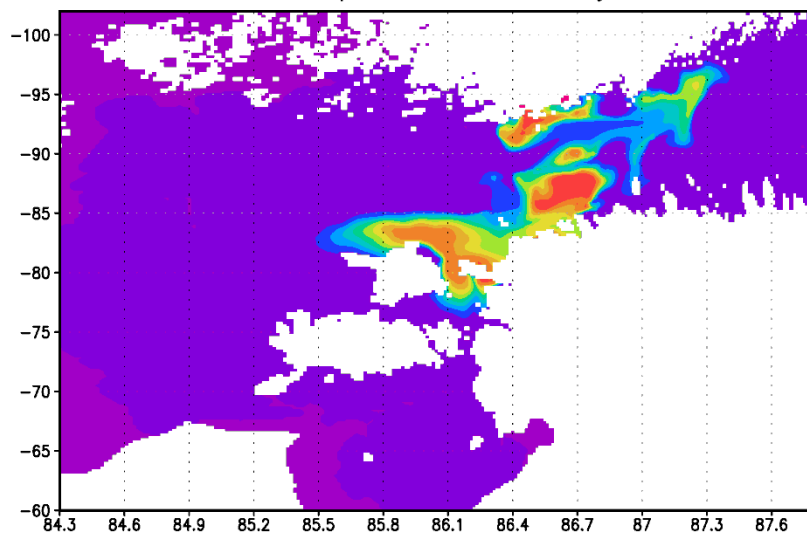




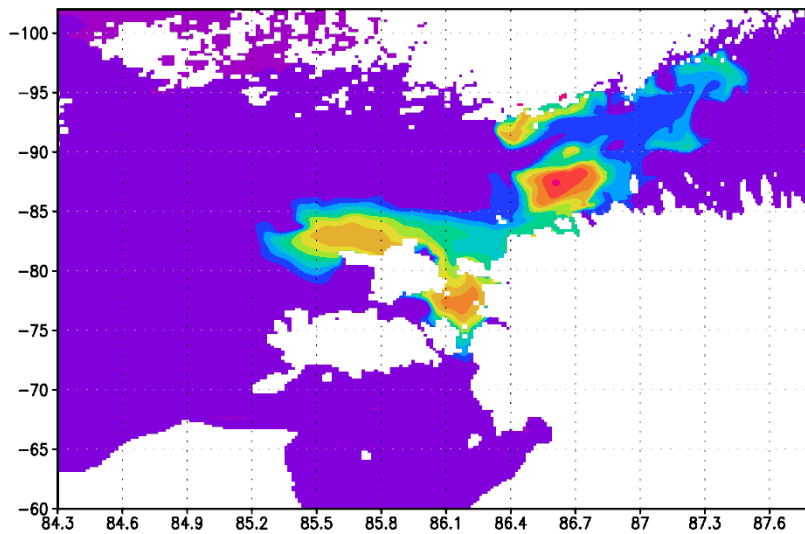
Inverse problem solution, 10 days



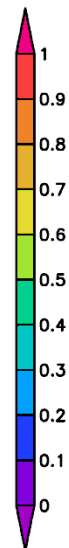
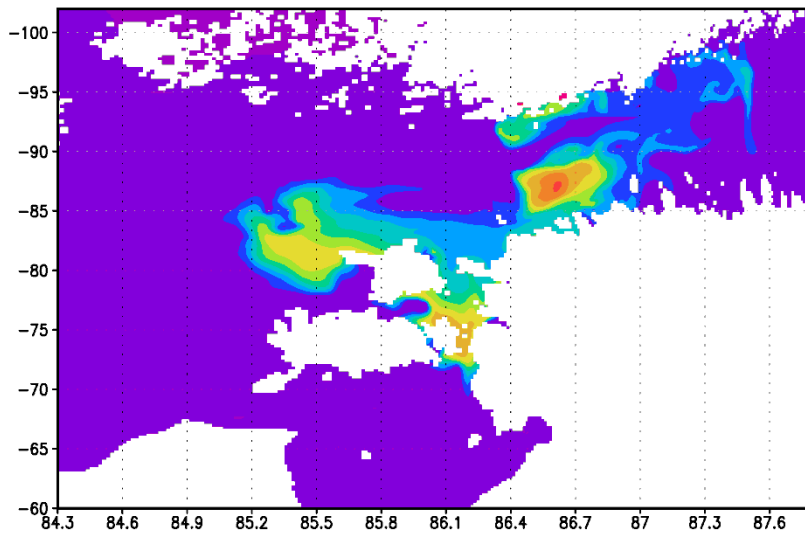
Inverse problem solution, 20 days



Inverse problem solution, 30 days



Inverse problem solution, 40 days



# **Г.И. Марчук. Гидродинамика океана: теоремы, алгоритмы, модели**

- **Эволюционная форма уравнений, выделение баротропной циркуляции, задача Пуанкаре**
- **Метод многокомпонентного расщепления**
- **Метод сопряженных уравнений. Анализ чувствительности. Энергоактивные зоны океана**
- **Вариационная ассимиляция. Сочетание методов расщепления и сопряженных уравнений**