

**Вихреразрешающее  
моделирование  
(LES – Large Eddy Simulation)  
турбулентности и переноса примесей**

Глазунов А.В.  
Институт вычислительной математики РАН



Старик и изучение воды, 1513



Леонардо да Винчи  
1452-1519

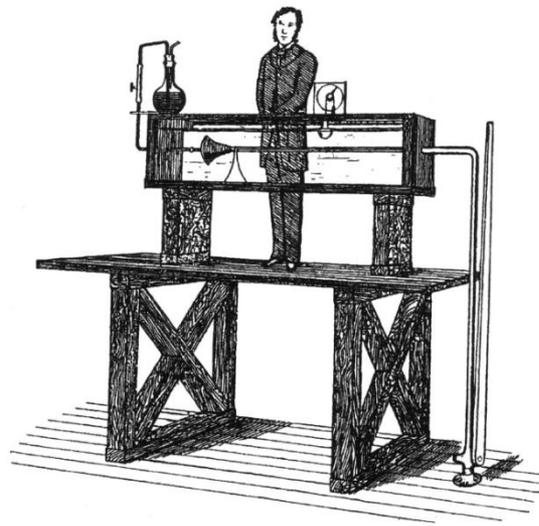
«...doue la **turbolenza** dellacqua sigenera doue la turbolenza dellacqa simantiene plugho doue laturbolenza dellacqua siposa ...»

« ... где турбулентность воды возбуждается где турбулентность воды сохраняется надолго где турбулентность воды затухает...»





Осборн Рейнольдс  
1842-1912



Л. Ф. Ричардсон (1881 -1953) впервые предложил идею прямого турбулентного каскада.

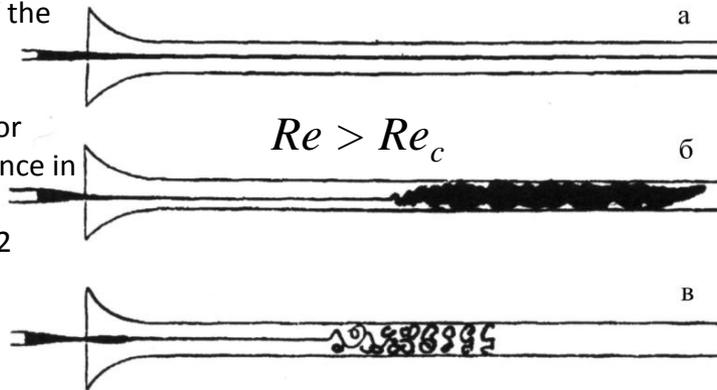
*“Big whorls have little whorls  
That feed on their velocity,  
And little whorls have lesser whorls  
And so on to viscosity.”*

L.F. Richardson 1922



Reynolds O. 1883

An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels.

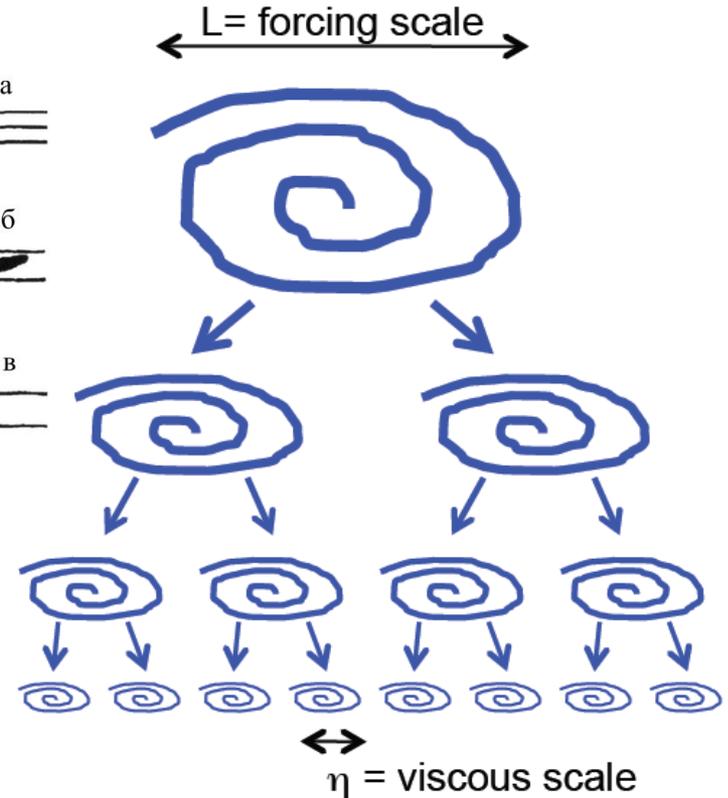


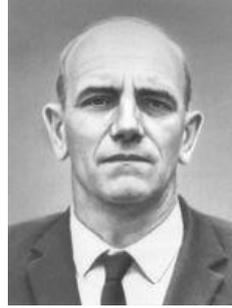
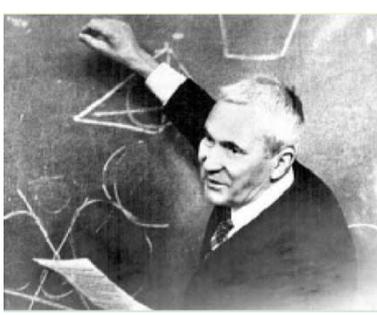
Philos. Trans. R. Soc 174:935-82

$$Re = \frac{UL}{(\nu/\rho_0)}$$

Число Рейнольдса  $Re$  характеризует соотношение инерционных и вязких сил действующих на частицу жидкости.

( $U$  – характерная скорость;  $L$ - характерный масштаб;  
 $\nu$  – динамическая вязкость;  $\rho_0$  – плотность жидкости или газа)





**Турбулентность** - "...завихренное течение с очень большим числом возбужденных степеней свободы и с хаотическим распределением дисперсионных соотношений и фазовых сдвигов

Андрей Николаевич Колмогоров

Александр Михайлович Обухов

Андрей Сергеевич Монин

## Теория K-41

А.Н. Колмогоров 1941а. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, Докл. АН СССР, 30, № 4, 299—303.

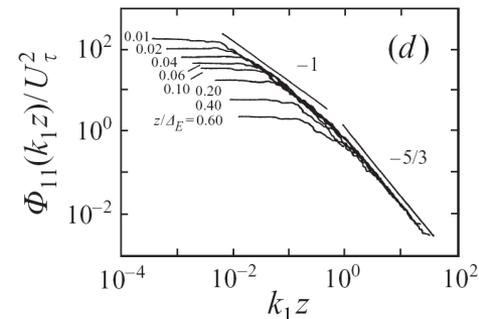
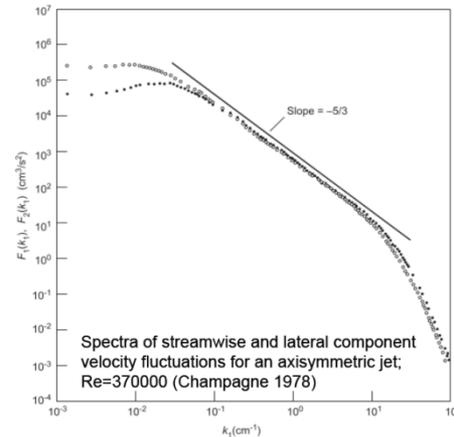
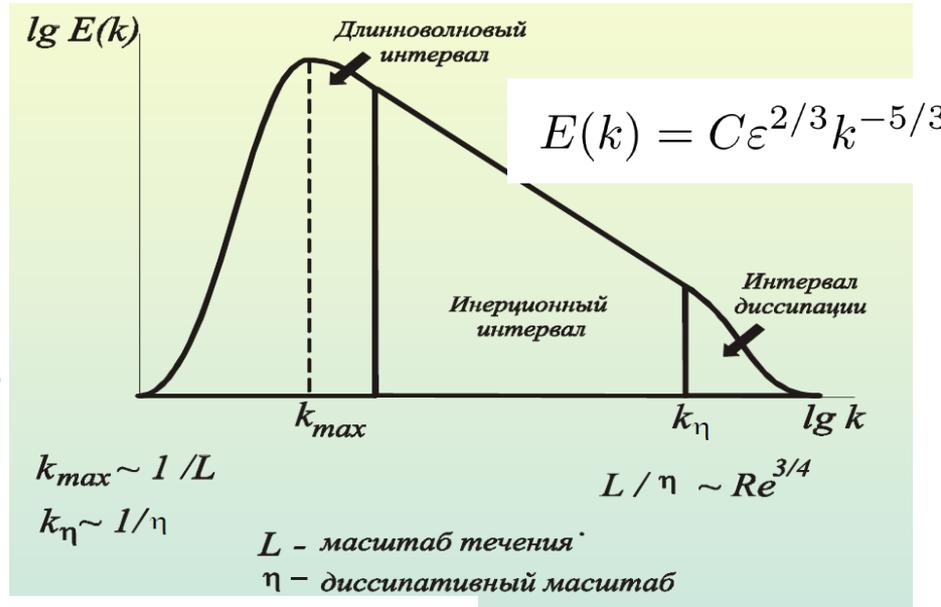
А.Н. Колмогоров 1941б, Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности, Докл. АН СССР, 32, № 1, 19—21.

А.М. Обухов 1941. О распределении энергии в спектре турбулентного потока, Изв. АН СССР, сер. геогр. геофиз., 5, № 4—5, 453—466.

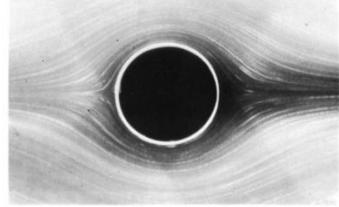
При очень больших числах Рейнольдса мелкомасштабные турбулентные движения однородны, изотропны и статистически стационарны независимо от характера крупномасштабных движений (**локально изотропная турбулентность**)

Статистические характеристики мелкомасштабных компонентов развитой турбулентности полностью определяются двумя размерными параметрами: удельной диссипацией турбулентной энергии  $\varepsilon$  [ $\text{м}^2/\text{с}^3$ ] и кинематической вязкостью  $\nu$  [ $\text{м}^2/\text{с}$ ]

Статистические характеристики компонентов развитой турбулентности в **инерционном интервале** определяются **единственным размерным параметром**  $\varepsilon$  [ $\text{м}^2/\text{с}^3$ ]



Обтекание кругового цилиндра, визуализация лабораторных экспериментов  
 Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа

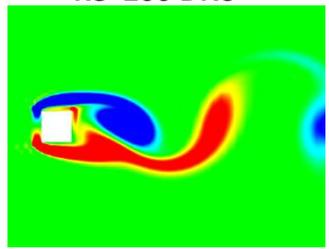


$Re = 0.16$

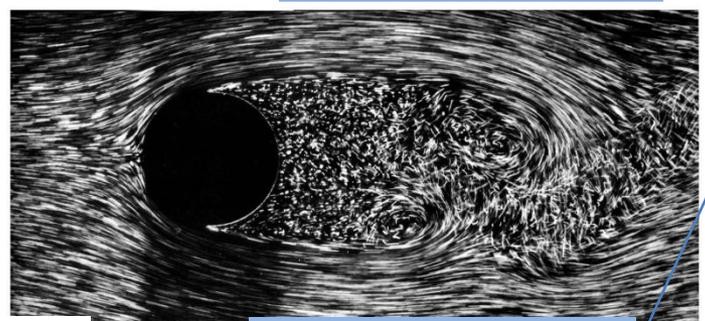


$Re = 140$

$\Delta \sim 1/40 L, N \sim 10^4$

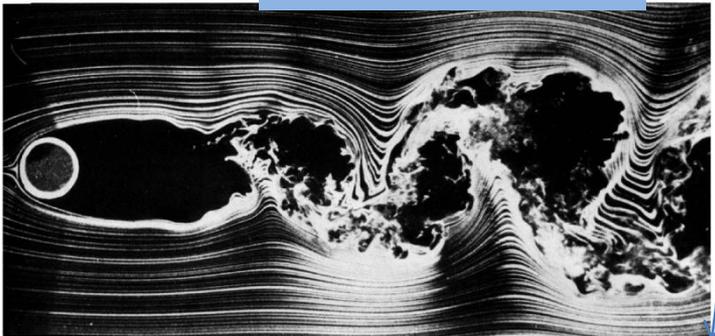


Re=200 DNS



$Re = 2000$

$\Delta \sim 1/300 L, N \sim 10^8$



$Re = 10000$

$\Delta \sim 1/1000 L, N \sim 10^9$

$$Re = \frac{UL}{(\nu/\rho_0)}$$

Число Рейнольдса

$$\tilde{\eta} = \eta/L$$

$$\tilde{\eta} = O(Re^{-3/4})$$

Вязкий масштаб длины  
 (размер минимальных вихрей)

Обезразмеренные уравнения Навье-Стокса:

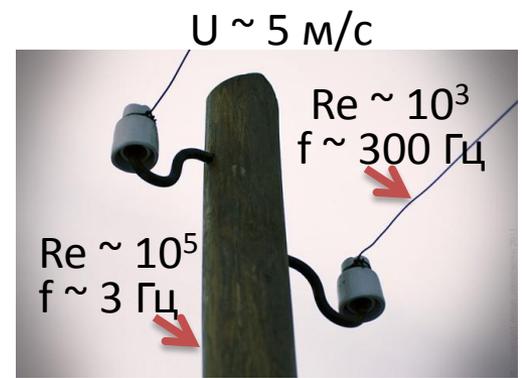
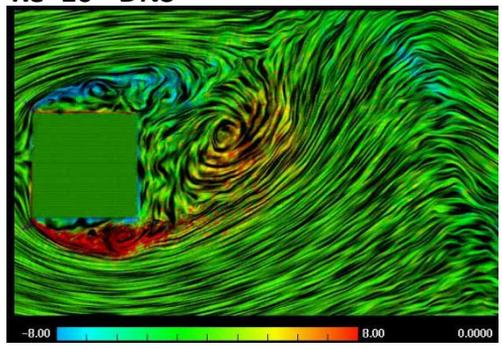
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i^e,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

Шаг сетки численной модели и число расчетных узлов

При очень больших числах Рейнольдса основные статистические характеристики течения перестают зависеть от Re

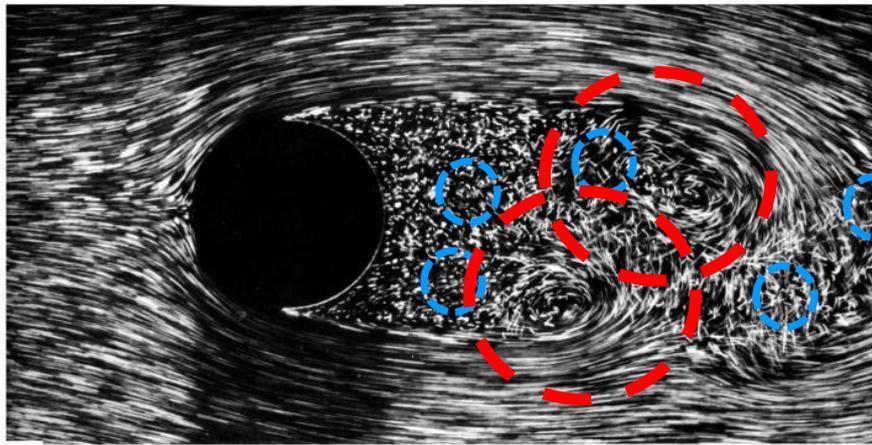
Re~10<sup>3</sup> DNS



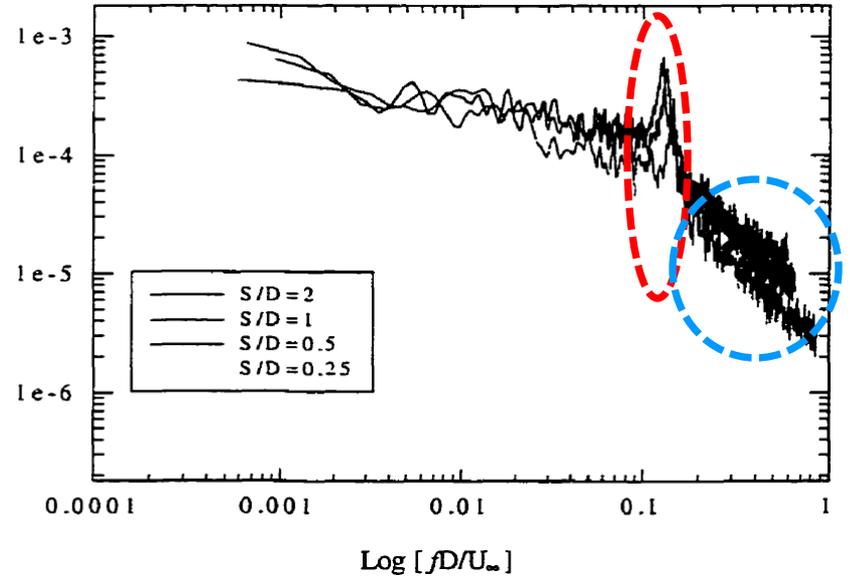
A. Veldman, University of Groningen,  
<http://www.math.rug.nl/~veldman/>

$$St = f L / U \sim \text{const} \sim 0.2$$

$$f \sim 0.2 U / L$$

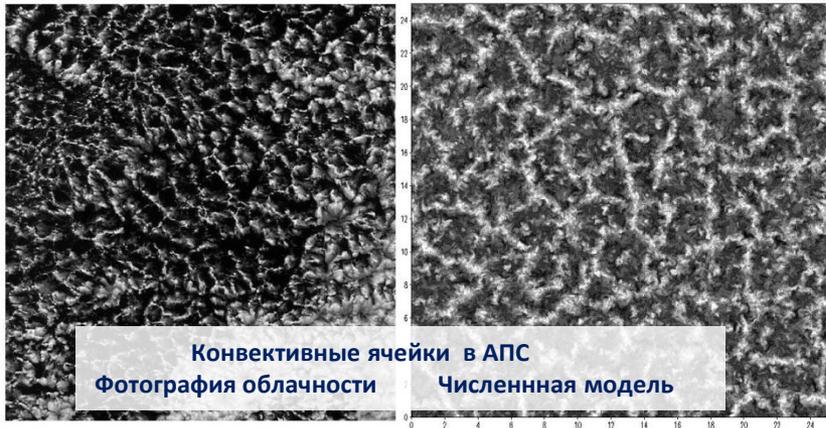
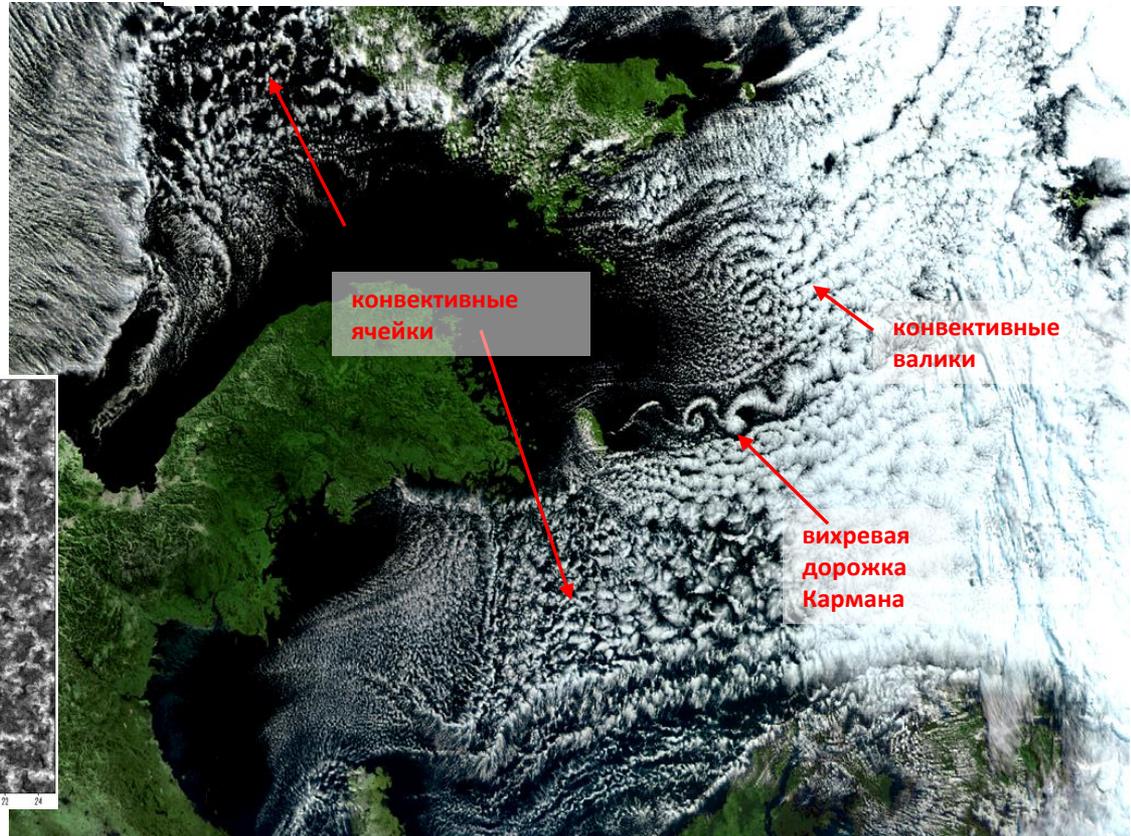
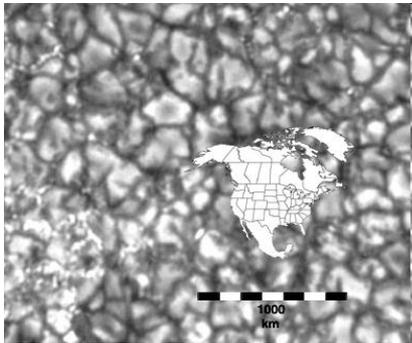


Log | power spectrum/ $U_\infty^2$  |



**Когерентные (организованные) структуры**  
**Турбулентность**

Конвективные ячейки на Солнце (гранулы).



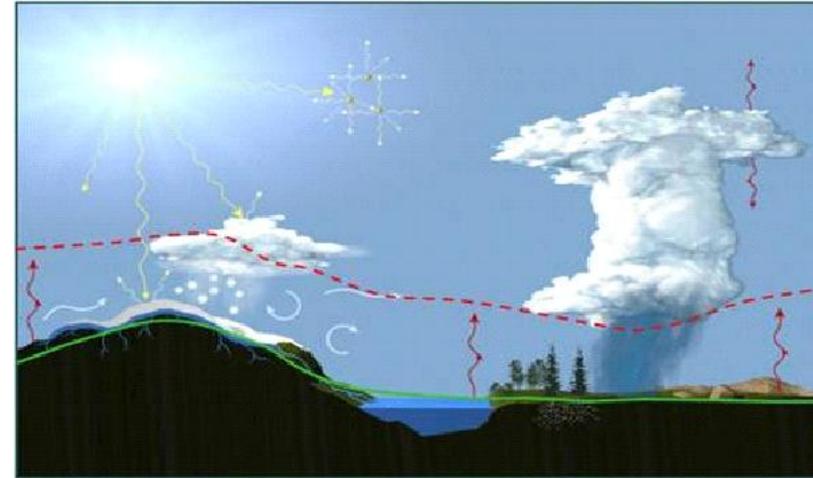
Конвективные ячейки в АПС  
Фотография облачности      Численная модель

<http://www.youtube.com/watch?v=c8zKWaxohng>

**F.X.Trias**, A. Gorobets, and A. Oliva. "Turbulent flow around a square cylinder at Reynolds number 22000: a DNS study", Computers & Fluids, 2014

# Особенности турбулентных процессов в геофизических пограничных слоях (ГПС)

*Атмосферный пограничный слой*       $H_{ABL} \sim 10^2 - 10^3 \text{ м}$   
*Верхний пограничный слой океана*       $H_{UOL} \sim 10^1 - 10^2 \text{ м}$   
*Придонный пограничный слой океана*       $H_{OBL} \sim 10^0 - 10^1 \text{ м}$



- Стратификация
- Солнечная радиация
- Наличие облачности и фазовые переходы в АПС
- Сильно шероховатая орографически и гидрологически неоднородная поверхность в АПС
- Генерация турбулентности за счет обрушения ветровых волн в ВПСО

...

Очень большие числа Рейнольдса

Атмосферный пограничный слой -  $Re \sim 10^9$

Верхний слой океана -  $Re \sim 10^6 - 10^7$

Придонный слой океана -  $Re \sim 10^5 - 10^6$

Планетарный пограничный слой атмосферы – это нижний турбулизированный слой тропосферы, свойства которого определяются тепловым и динамическим взаимодействием с поверхностью.

Важная роль плотностной стратификации, неустойчивой, приводящей к конвекции или устойчивой, подавляющей турбулентность

Существенное влияние оказывает вращение Земли, приводя к формированию спирали Экмана в средней скорости ветра во внеэкваториальных широтах и непосредственно воздействуя на структуру и энергию крупномасштабных (сравнимых с толщиной ПСА) аномалий скорости

Пограничный слой атмосферы - ключевое звено климатической системы

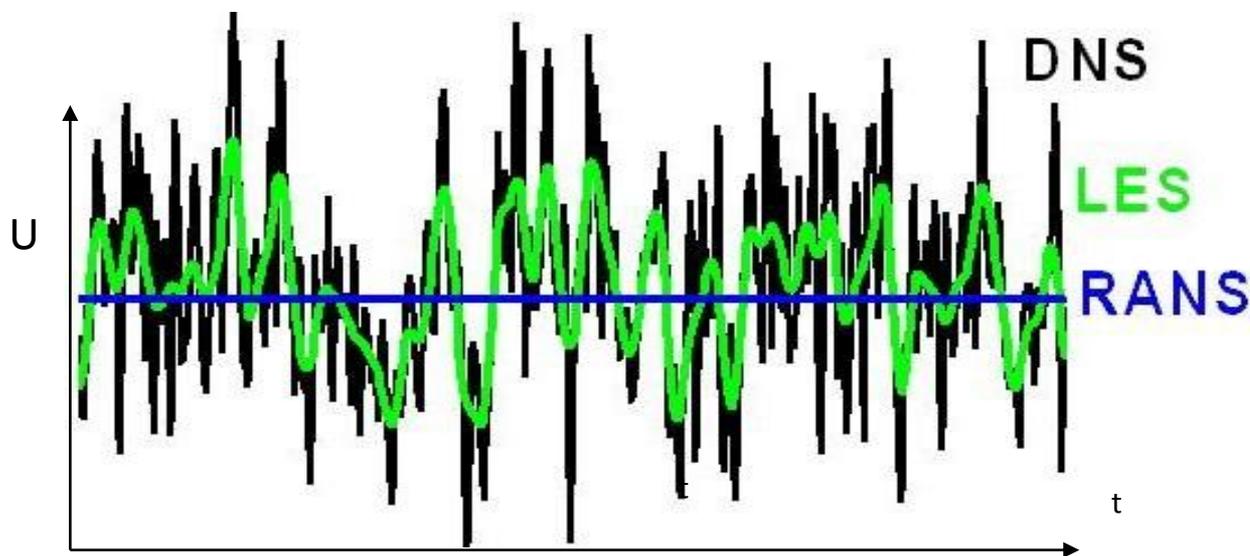
-регулирует преобразование энергии солнечной радиации, поглощенной подстилающей поверхностью, в энергию движений в атмосфере, океане и других водных системах

- контролирует уровень диссипации кинетической энергии

-обеспечивает тепловлагоперенос между атмосферой и поверхностью Земли.

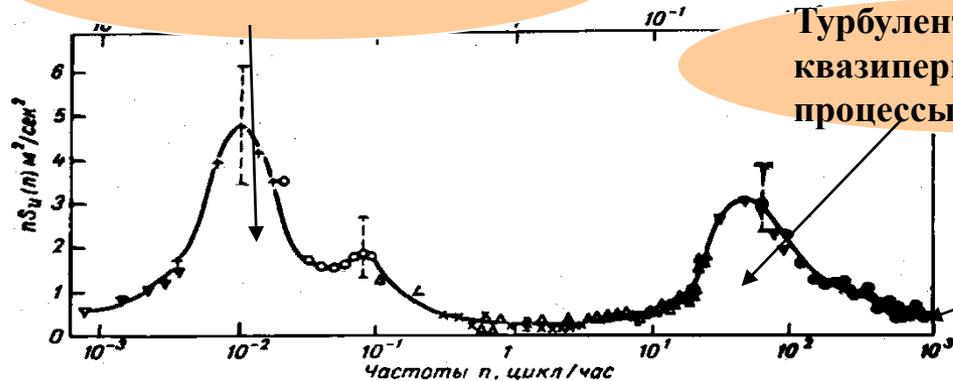
# Три подхода к численному моделированию турбулентности

1. **Прямое численное моделирование** (direct numerical simulation, **DNS**).
2. **Решение систем уравнений, осредненных по Рейнольдсу** (Reynolds averaged Numerical Simulation, **RANS**).  
(локально –одномерные модели, один из основных блоков моделей общей циркуляции атмосферы и океана)
3. **Вихреразрешающее моделирование или моделирование методом крупных вихрей** (Large Eddy Simulation, **LES**).  
(инструмент , необходимый для построения и проверки RANS-моделей)



# Синоптическая изменчивость

$$L \sim 10^3 \text{ м}, U \sim 10^1 \text{ м/с}, (\nu/\rho_0) \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$



Спектр скорости ветра в приземном слое атмосферы (по Ван дер Ховену (1957),  $n$  — частота,  $S_u(n)$  — спектральная плотность.

Турбулентные и квазипериодические процессы в АПС

$$\tilde{\eta} = \eta/L$$

$$\tilde{\eta} = O(Re^{-3/4})$$

$$Re = \frac{UL}{(\nu/\rho_0)}$$

$$Re \sim 10^9$$

$$\tilde{\eta} \sim 10^{-7}$$

Требования к DNS

$$N = \tilde{\eta}^{-3} \sim 10^{21}$$

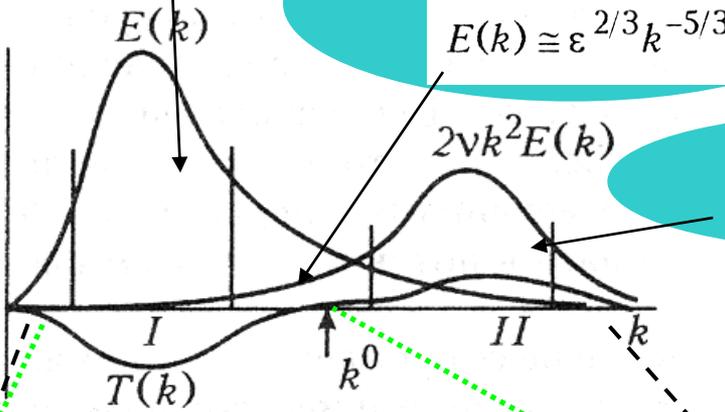
Современные компьютеры не способны выполнять такие вычисления!

Интервал генерации

Инерционный интервал

$$E(k) \cong \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

Интервал диссипации



Принципиальная невозможность корректно задать граничные условия.

В DNS необходимо явно описать все особенности подстилающей поверхности.

LES - наиболее перспективный подход для решения практических задач по моделированию турбулентных процессов в геофизических ПС.

DNS (Direct Numerical Simulation)

LES (Large Eddy Simulation)

RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes)

три подхода к моделированию турбулентности

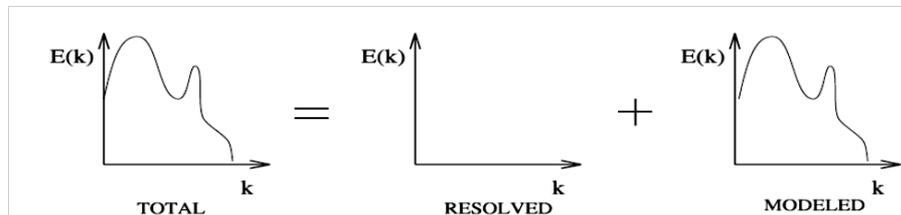
## *Некоторые другие аббревиатуры, применяемые для названия моделей турбулентности*

**ILES – Implicit LES.** Подход подразумевает использование диссипативных монотонных и квазимонотонных схем, полагается, что коротковолновая часть турбулентных пульсаций автоматически подстраивается, обеспечивая нужную диссипацию

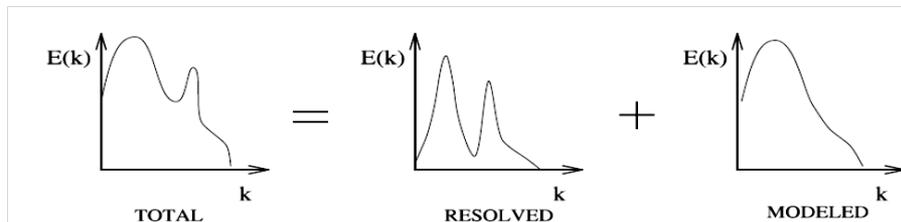
**MILES – Monotone Integrated LES.** Численные схемы для таких моделей заранее строятся таким образом, чтобы одновременно выполнять функции турбулентных замыканий

**DES=RANS(URANS)+LES --- Detached Eddy Simulation**  
объединение вихреразрешающей и осредненной по Рейнольдсу моделей (необходимо в тех случаях когда масштаб вихрей заведомо меньше пространственного шага модели в некоторой подобласти, например вблизи твердых границ). Неплохие результаты в инженерных расчетах при умеренных  $Re$ . Наибольшая трудность – зона перехода от RANS к LES.

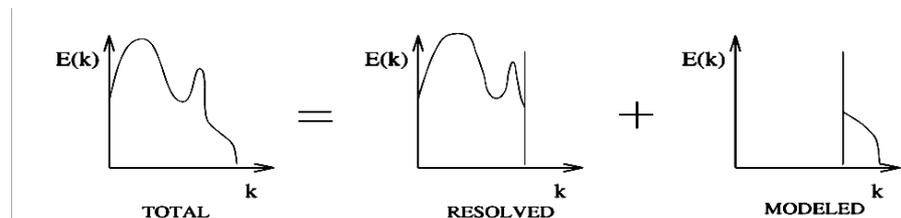
**Unsteady Reynolds Averaged Numerical Simulation (URANS)  $\approx$  Semi-Deterministic Simulation (SDS), Very Large-Eddy Simulation (VLES), Coherent Structure Capturing (CSC)**



**Fig. 1.1.** Decomposition of the energy spectrum of the solution associated with the Reynolds Averaged Numerical Simulation (symbolic representation).



**Fig. 1.2.** Decomposition of the energy spectrum of the solution associated with the Unsteady Reynolds Averaged Numerical Simulation approach, when a predominant frequency exists (symbolic representation).



**Fig. 1.3.** Decomposition of the energy spectrum in the solution associated with large-eddy simulation (symbolic representation).

**Иллюстрации из книги  
Pierre Sagaut «Large Eddy Simulation for  
Incompressible Flows»**

$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + F_i^e$ , Система уравнений Навье Стокса для вязкой несжимаемой жидкости или газа.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

## Прямое численное моделирование (DNS)

$$F(a(x, t)) \equiv \bar{a}(x, t) = \int_{R^3} G(x - x', \Delta_f) a(x', t) dx'$$

Фильтрация по пространству

$$\overline{\frac{\partial a(x, t)}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{a}(x, t)}{\partial x_i}; \quad \overline{\frac{\partial a(x, t)}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{a}(x, t)}{\partial t}$$

Сводит исходную систему к системе с меньшим количеством степеней свободы

## Вихреразрешающее моделирование (Large Eddy Simulation, LES)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} + \bar{F}_i^e,$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j.$$

Для очень больших чисел Re

1. Влиянием молекулярной вязкости на крупные вихри можно пренебречь

2. Необходимо найти турбулентное замыкание

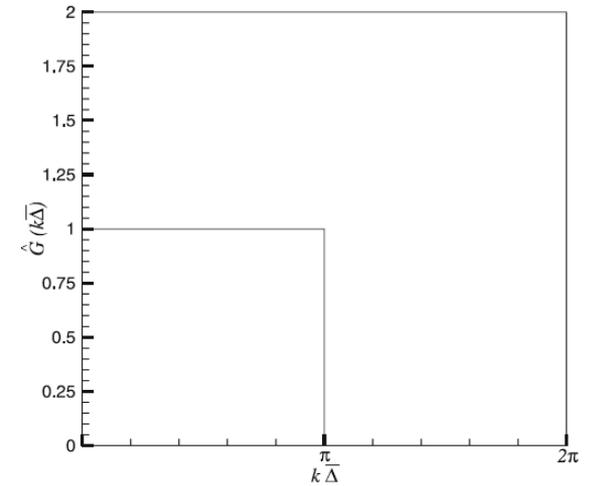
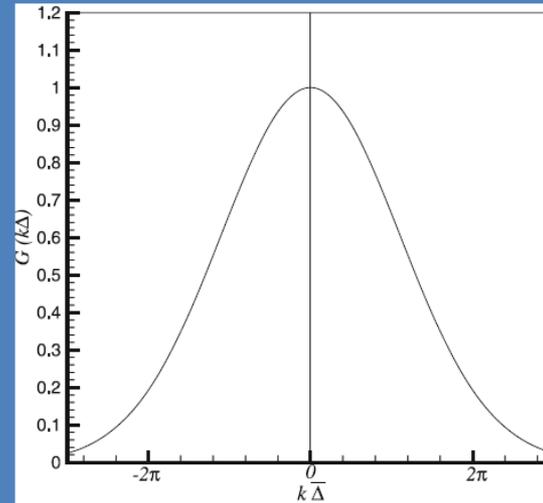
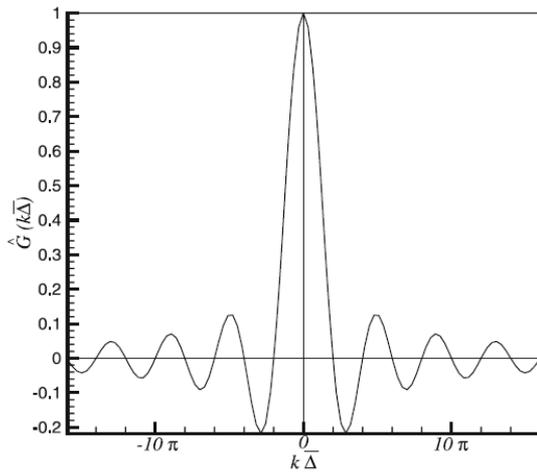
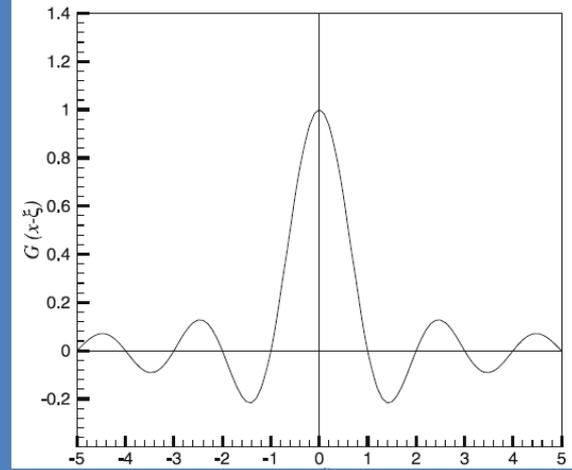
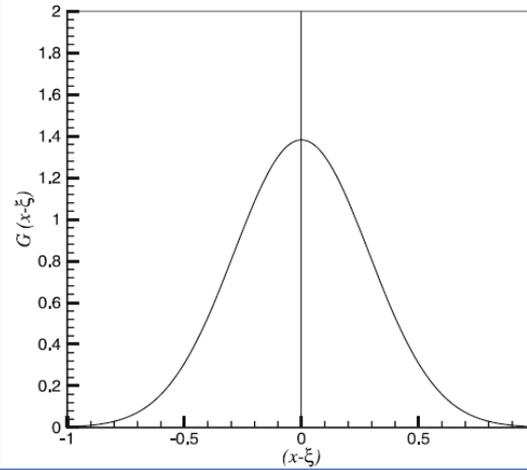
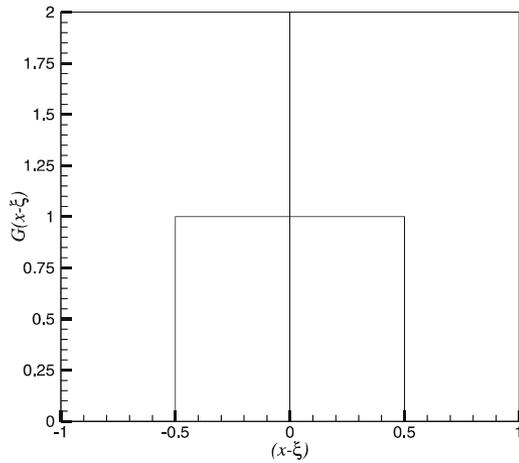
$$\tau_{ij} \approx T_{ij}(\bar{u}_k, \bar{u}_l, \bar{u}_m)$$

Центральная проблема LES.

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\bar{u}_i \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_i^s}{\partial x_i} + \bar{Q}^s \quad \sigma_i^s = \overline{s u_i} - \bar{u}_i \bar{s}$$

Аналогичная задача для скаляров (температура, влажность воздуха, Концентрации газовых примесей )

# Пространственные фильтры, наиболее часто применяемые при формулировке LES модели.



“tophat” фильтр

$$G(x) = \begin{cases} 1/\bar{\Delta} & \text{if } |x| \leq \bar{\Delta}/2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

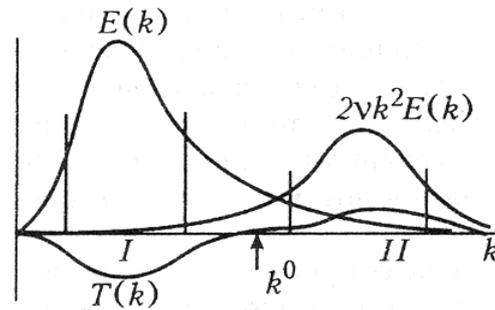
Гауссов фильтр

$$G(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi \bar{\Delta}^2}} \exp\left(-\frac{6x^2}{\bar{\Delta}^2}\right),$$

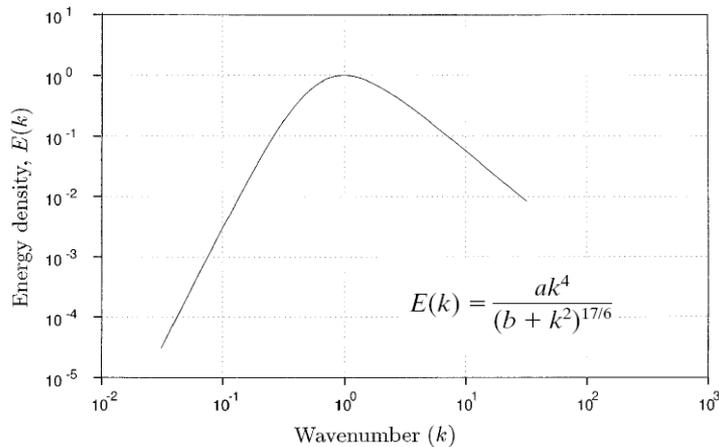
Спектральный фильтр

$$\hat{G}(k) = \int_D G(x') e^{-ikx'} dx' = \begin{cases} 1 & \text{if } k \leq \pi/\bar{\Delta}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

# Одна из основных трудностей вихреразрешающего моделирования



ANALYSIS OF NUMERICAL ERRORS IN LES



SANDIP GHOSAL

JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 125, 187–206 (1996)

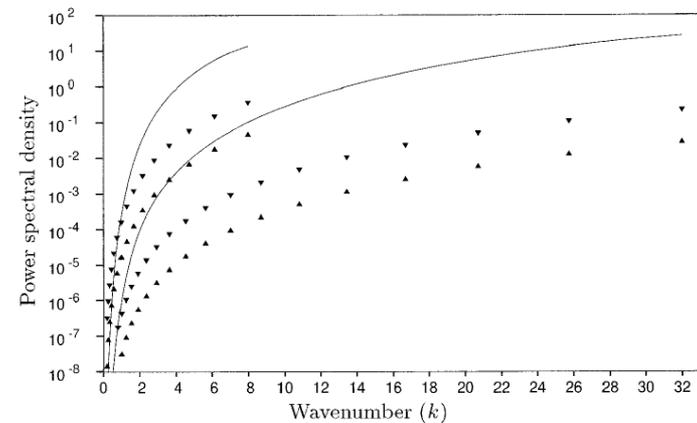
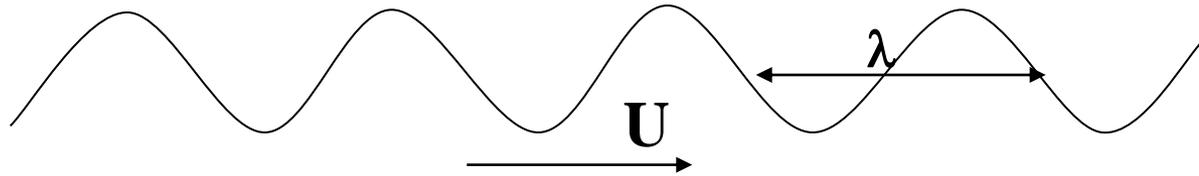
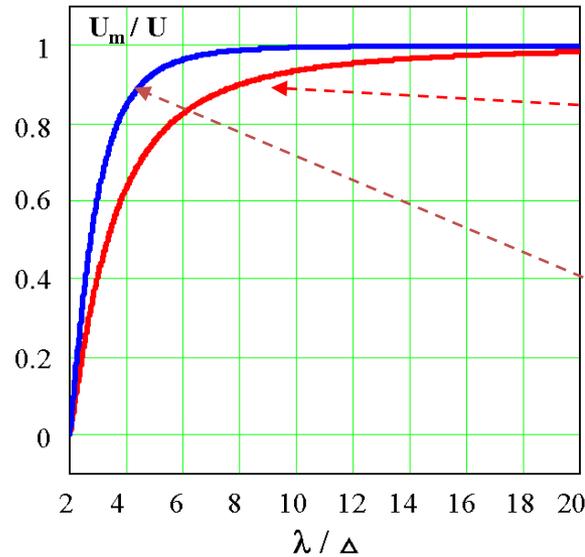


FIG. 1. The Von-Karman spectrum normalized so that the maximum energy density is at  $k = 1$  and  $E(1) = 1$ . for  $k_m = 8$  and  $32$ . FIG. 3. The finite-differencing error of a second order scheme (—) compared to the lower (▲) and upper (▼) bounds for the subgrid force

**Ошибки численных аппроксимаций нелинейных слагаемых уравнения баланса импульса во всем спектральном диапазоне имеют тот же порядок, что и «подсеточные силы», либо существенно превышают их (для схем низкого порядка точности) (Ghosal, 1995, Kravchenko and Moin 1996, Park et al. 2004, ...).**



$U_m$  - модифицированная скорость линейного переноса гармоники центрально-разностной схемой ( $U$  – скорость потока;  $\Delta$  – шаг сетки)



Центрально-разностная схема второго порядка точности

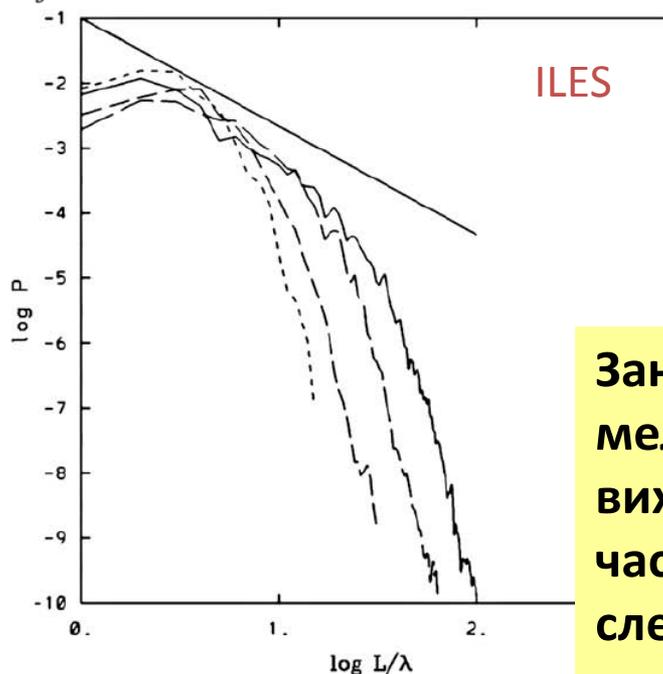
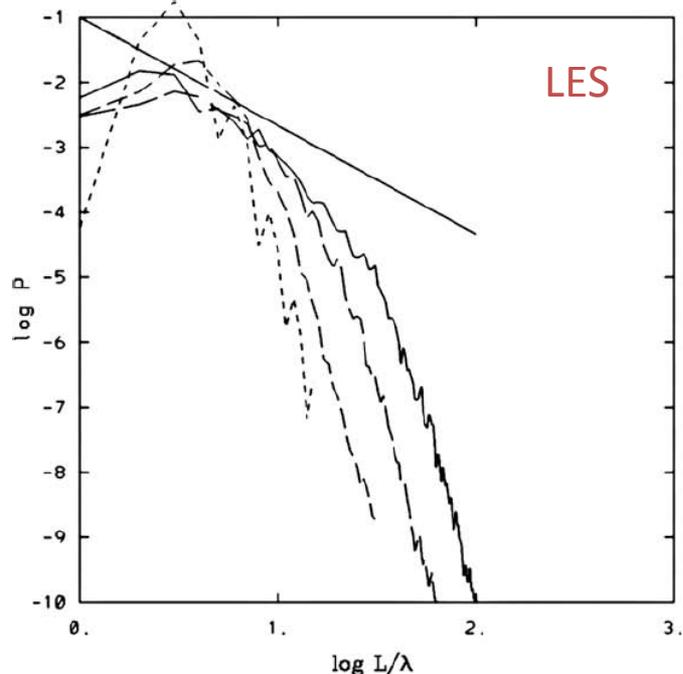
Центрально-разностная схема четвертого порядка точности

Все турбулентные замыкания используют информацию о самых мелкомасштабных составляющих турбулентного потока, которые могут быть существенно искажены вследствие ошибок аппроксимации.

# LES-модели с конечно-разностными численными схемами

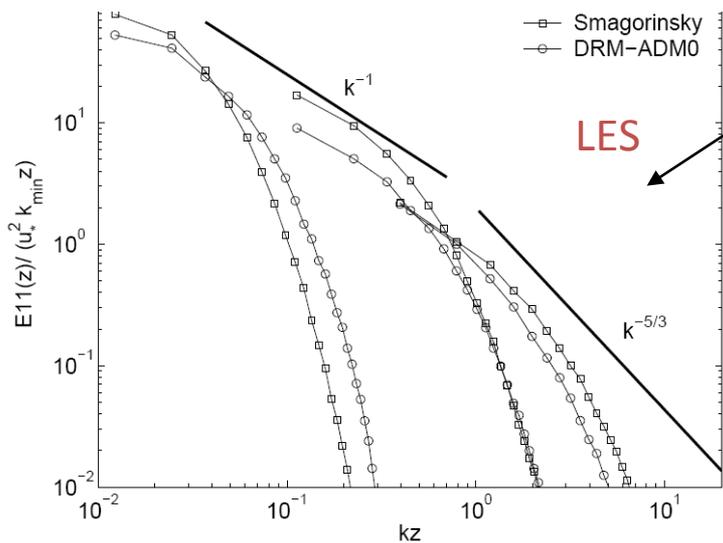
Z.P. Piotrowski et al. / Journal of Computational Physics 228 (2009) 6268–6290

On numerical realizability of thermal convection



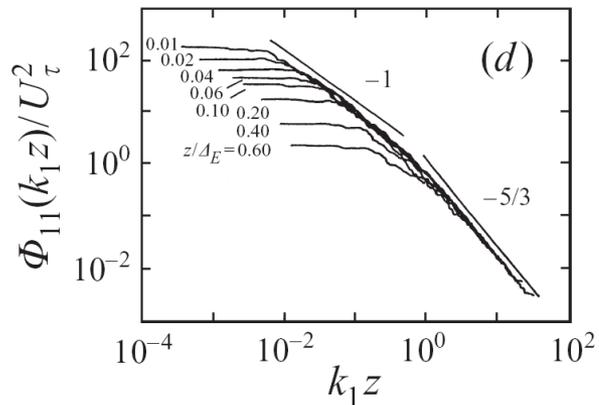
Конвективный пограничный слой атмосферы

**Заниженная энергия мелкомасштабных вихрей в LES-моделях часто является следствием ошибок аппроксимации численных схем**



Нейтрально-стратифицированный пограничный слой

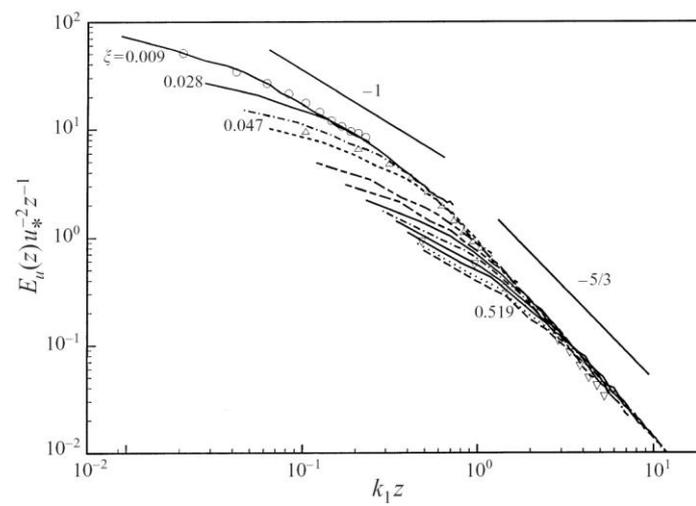
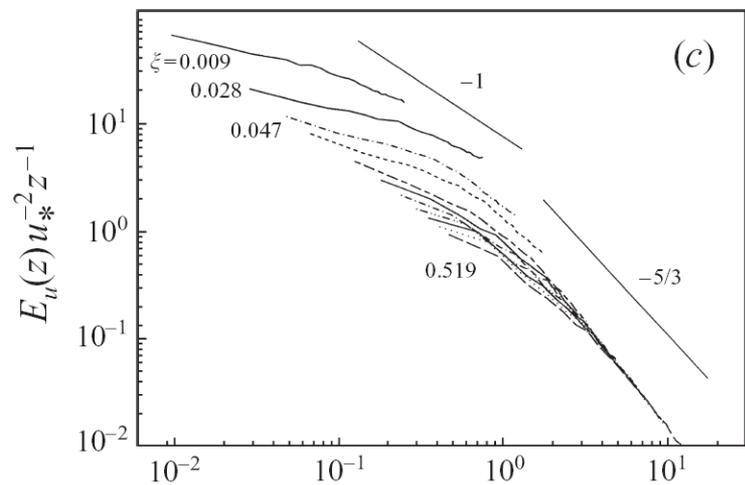
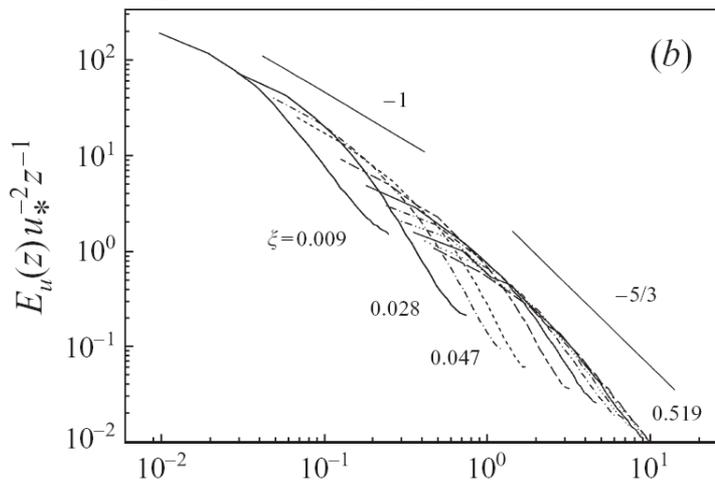
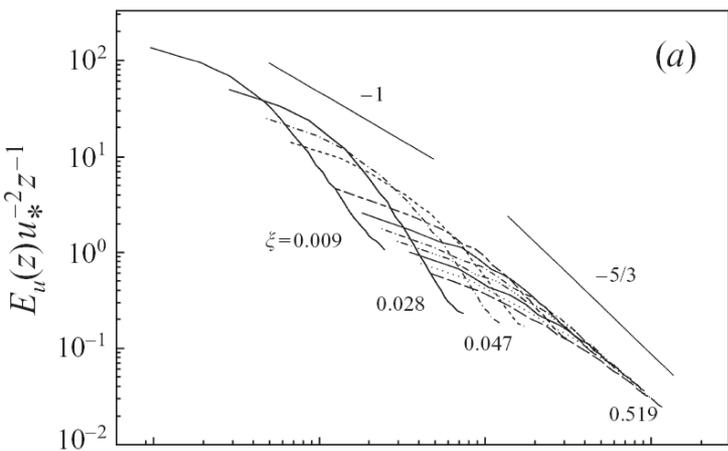
Katopodes F.C., Street R.L., Xue M. and Ferziger J.H. Explicit Filtering and Reconstruction Turbulence Modeling for Large-Eddy Simulation of Neutral Boundary Layer Flow. // J. Of The Atm. Sc., 2005, **62**, pp. 2058-2076.



Нормированные спектры продольной компоненты скорости на различном удалении от стенки (лабораторные измерения,  $Re_\tau = 2 \times 10^5$ , Perry et al. 1986).

F. Porte-Agel, C. Meneveau and M. B. Parlange

**A scale-dependent dynamic model for large-eddy simulation: application to a neutral atmospheric boundary layer** J. Fluid Mech. (2000), vol. 415, pp. 261-284



Псевдо-  
спектральная  
численная схема

LES-модель с  
различными  
«подсеточными»  
замыканиями

## Модели, основанные на введении турбулентной вязкости

$$\tau_{ij}^a = \tau_{ij} - 1/3\delta_{ij}\tau_{kk} = -2\nu_{sgs}\bar{S}_{ij} \quad \bar{S}_{ij} = (\partial\bar{u}_i/\partial x_j + \partial\bar{u}_j/\partial x_i)/2$$

Девиатор тензора турбулентных напряжений пропорционален тензору деформаций.

Тензор скоростей деформаций, построенный на основе фильтрованной скорости

## Модель Смагоринского

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} \approx \tau_{ij}^{smag} = -2C\Delta_g^2|\bar{S}|\bar{S}_{ij} \quad |\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$$

+ Имеет ясный физический смысл – локальный баланс сдвиговой генерации и диссипации подсеточной турбулентной кинетической энергии

+ Математически обоснована (существует теорема существования и единственности решения регуляризованной системы уравнений Навье-Стокса, Ладыженская, 1967)

+ Для инерционного интервала спектра существует теоретическая оценка параметра

$$(Lilly, 1967) \quad C_s \sim 0,17$$

+ Дает довольно высокую корреляцию (~0.7) наблюдаемой и моделируемой диссипации

- Корреляция наблюдаемого и моделируемого тензоров турбулентных напряжений незначительна ~0.2

- Не учитывает эффекты стратификации

- Константа C не универсальна и требует подбора.

# Модели, основанные на введении турбулентной вязкости и турбулентной диффузии

## K-ε модель (широко распространена в геофизических RANS)

Уравнение для турбулентной кинетической энергии движений подсеточного масштаба:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}_j E}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{K_m}{\sigma_E} \frac{\partial E}{\partial x_j} + K_m \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 - \delta_{i3} \frac{1}{\rho_0} K_h \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} - \epsilon$$

Уравнение для скорости диссипации ТКЭ:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}_j \epsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{K_m}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + c_1 S \epsilon / E + c_2 B \epsilon / E - c_3 \epsilon^2 / E$$

Ограничение максимального размера подсеточных вихрей:

$$l = \frac{c_\epsilon E^{3/2}}{\epsilon}, \quad \epsilon > \epsilon_{min} = \frac{c_\epsilon E^{3/2}}{l_{max}}$$

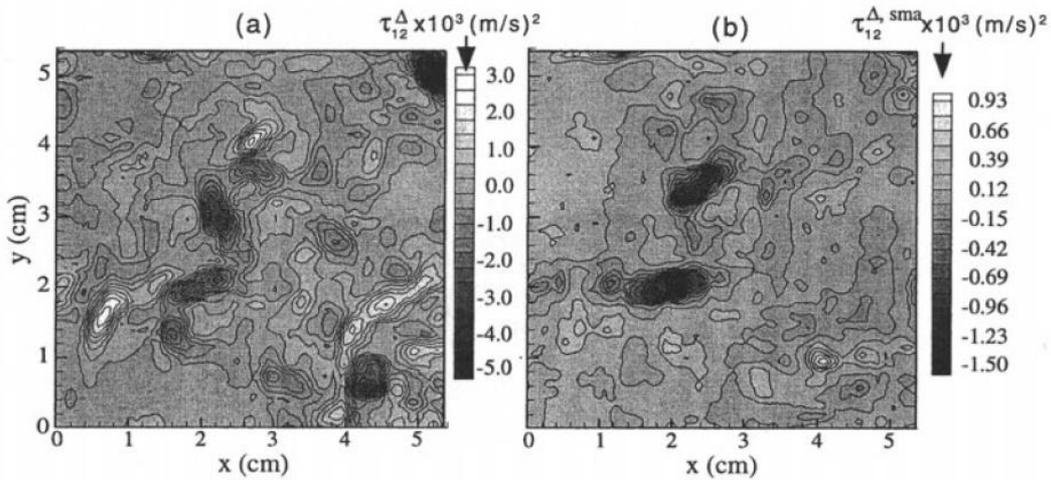
$$K_m = \frac{c_\mu E^2}{\epsilon} \quad \tau_{ij} = -K_m \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad F a_i = -K_h \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i}$$

+ Учтены эффекты стратификации

+ Учтены эффекты переноса мелкомасштабной турбулентности основным потоком.

+/- Больше количество констант с одной стороны дает возможность лучше настроить модель на воспроизведение одного физического процесса, например конвективной циркуляции в АПС, но с другой стороны делает ее еще менее универсальной.

- Очень малая корреляция с реально наблюдаемым тензором турбулентных напряжений, свойственная всем моделям диффузионного типа



Измеренная и вычисленная при помощи модели Смагоринского компонента тензора напряжений в турбулентной струе (Liu, 1994)

Из картинок видно, что корреляция невелика, а амплитуда сильно занижена

### Некоторые другие диссипативные модели

Две модели гипервязкости четвертого порядка

$$\tau_{ij}^{(4)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu_{sgs}^{(4)} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu_{sgs}^{(4)} \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad \tau_{ij}^{(4)} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left( \nu_{sgs}^{(4)} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

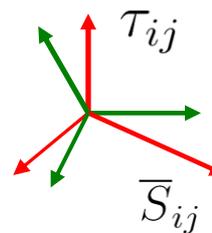
$$\nu_{sgs}^{(4)} = C_m \Delta^4 |\bar{S}|$$

+ Диссипация смещена в коротковолновую область спектра

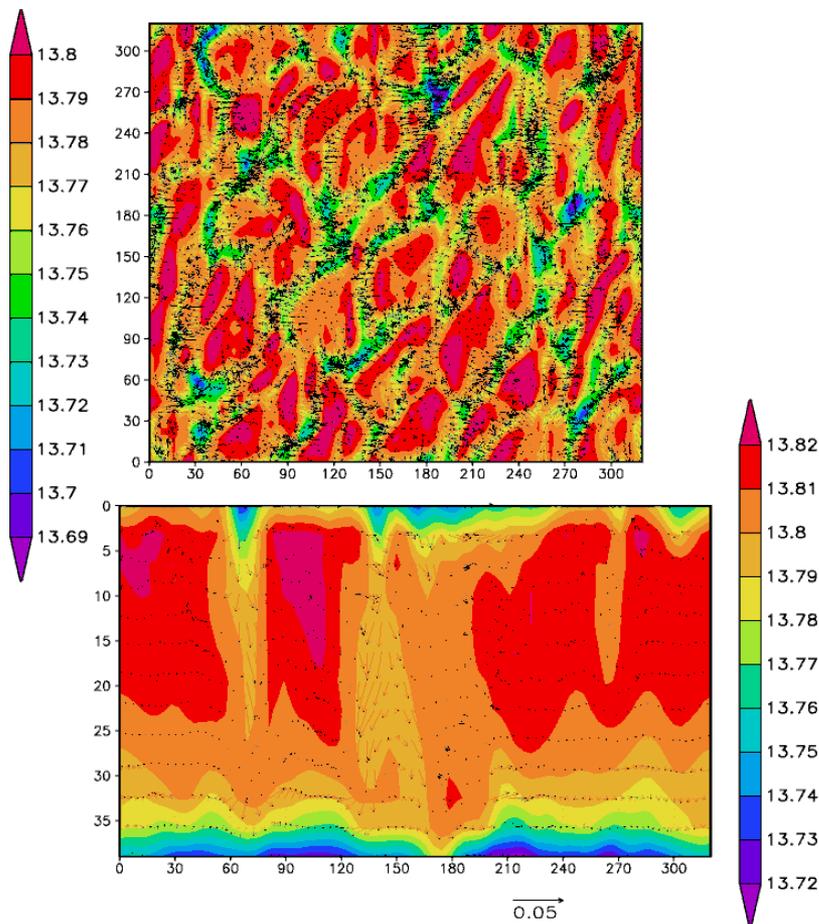
- Малая корреляция с реально наблюдаемым тензором турбулентных напряжений

+ способность правильно описывать прямой каскад энергии от разрешаемых явно вихрей к подсеточным.

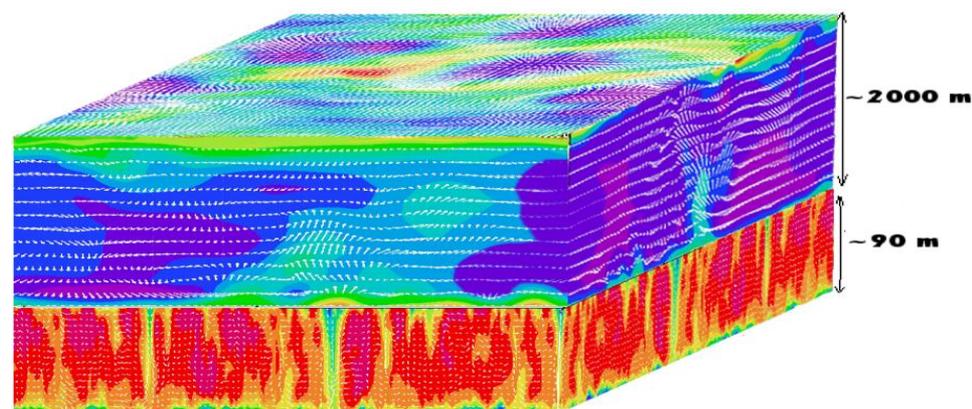
-Малая корреляция с реально наблюдаемым тензором турбулентных напряжений



собственные векторы тензоров



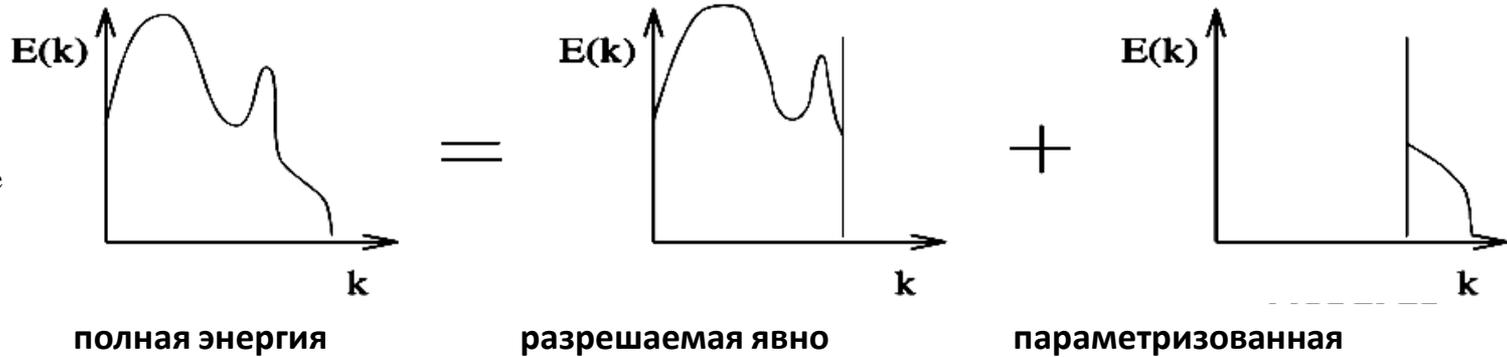
Область применения диффузионных моделей - квазиоднородные турбулентные течения поддерживаемые за счет крупномасштабного внешнего воздействия (например, неустойчиво стратифицированные пограничные слои атмосферы и океана)



Моделирование конвективных ВСО и ПСА при помощи модели с К-ε замыканием

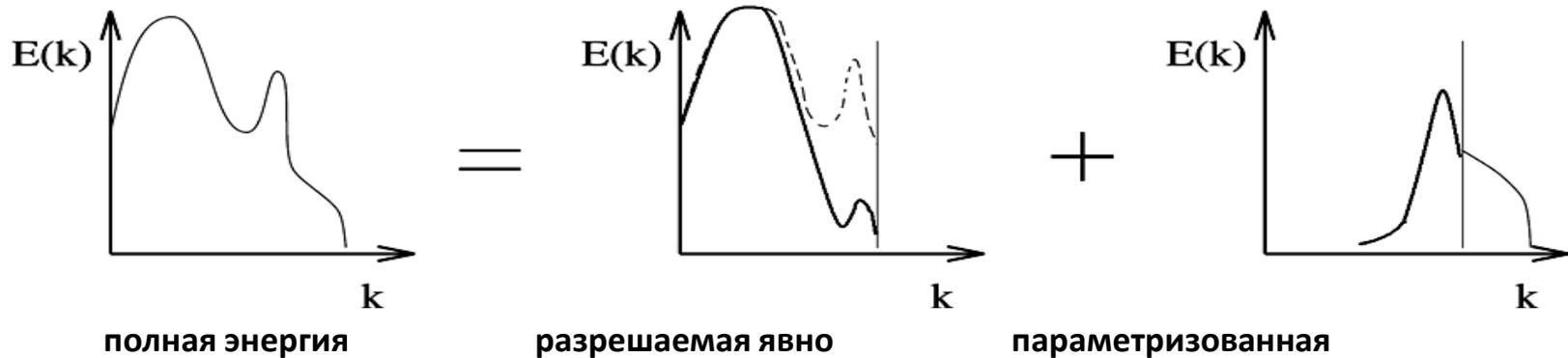
**LES с неявной фильтрацией** – аппроксимация по пространству играет роль фильтра. Ширина фильтра определяется шагом сетки

Pierre Sagaut  
«Large Eddy  
Simulation for  
Incompressible  
Flows»



Схематическое представление спектра кинетической энергии в LES-модели

**LES с явной фильтрацией** – пространственный фильтр имеет ширину, превышающую шаг сетки, задан явным образом и используется при построении замыкания.



# Смешанное подсеточное/подфильтровое замыкание

$$u'_i = u_i - \bar{u}_i$$

Тройная декомпозиция тензора турбулентных напряжений

$$\tau_{ij} = L_{ij}^g + C_{ij}^g + R_{ij}^g$$

Параметризуется

Воспроизводится явным образом

$$C_{ij}^g = \tau^g(\bar{u}_i, u'_j) + \tau^g(\bar{u}_j, u'_i),$$

$$R_{ij}^g = \tau^g(u'_i, u'_j).$$

$$L_{ij}^g = \tau^g(\bar{u}_i, \bar{u}_j)$$

$$\tau^g(\varphi, \psi) = \overline{\varphi\psi} - \bar{\varphi} \bar{\psi}$$

$$\tau_{ij}^{mix} = \tau_{ij}^{smag} + \tau_{ij}^{ssm} = -2(C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} + (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}_i} \bar{\bar{u}_j})$$

Задавая пространственный фильтр модели явным образом можно вычислить существенную часть тензора напряжений не прибегая к параметризациям

**+ Повышается корреляция с реально наблюдаемым тензором турбулентных напряжений**

# Динамический подход (Germano, 1991)

$$\widehat{\tau}_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} \quad T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$$

Вводится дополнительный «тестовый» фильтр  $(\widehat{\quad})$

Тождество Германо:

$$T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$$

Не содержит нефильтрованных компонент скорости

Параметры замыкания находятся автоматически путем минимизации невязки переопределенной системы уравнений

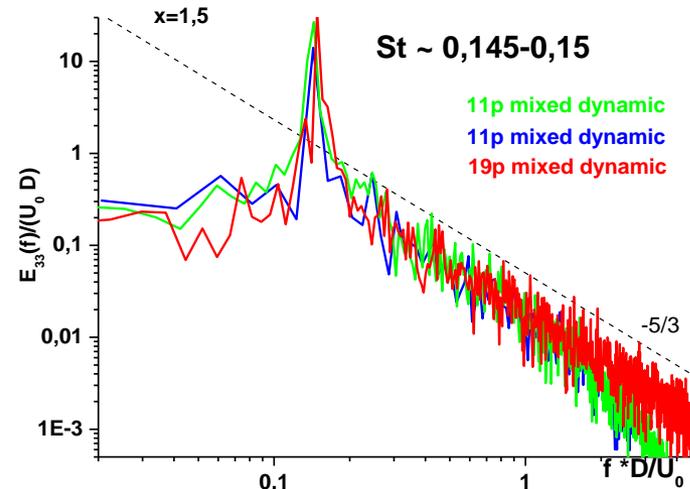
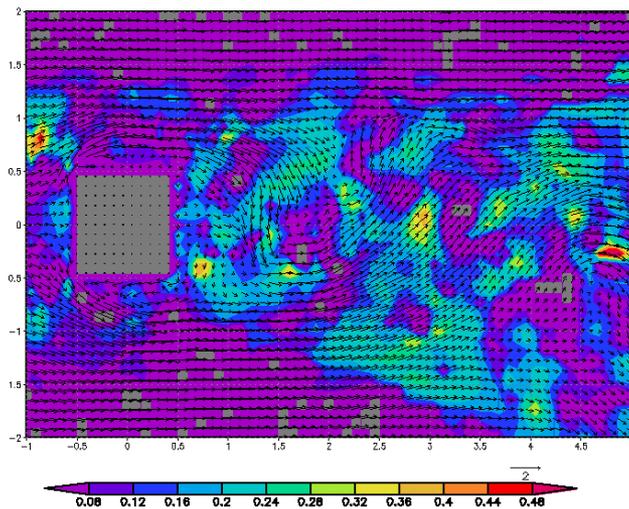
$$\left( (C_{\widehat{\Delta}} \widehat{\Delta})^2 M_{ij}^{\tau} \right) - (C_{\overline{\Delta}} \overline{\Delta})^2 M_{ij}^T = L_{ij} - H_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

**+ В идеале – можно получить модель без киках бы то ни было заранее заданных констант**

Сюда можно подставить любую выбранную модель и предположить, что ее константы не зависят от ширины фильтра

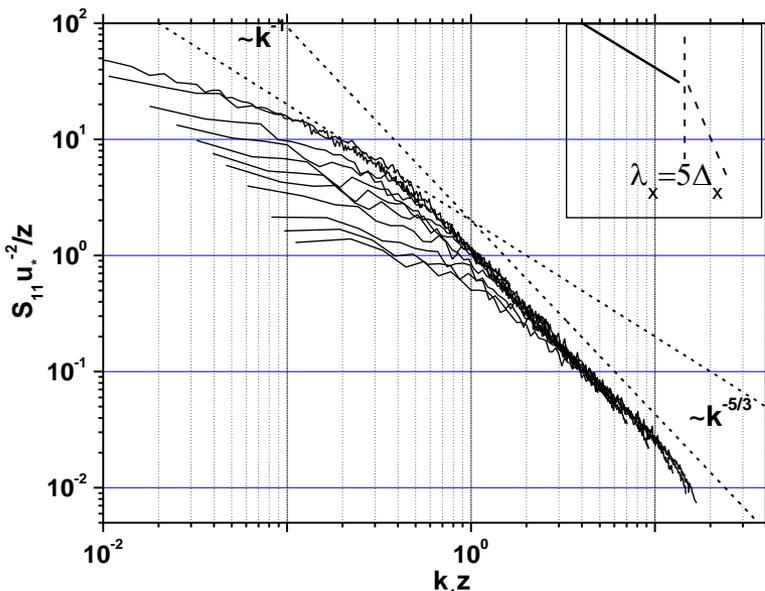
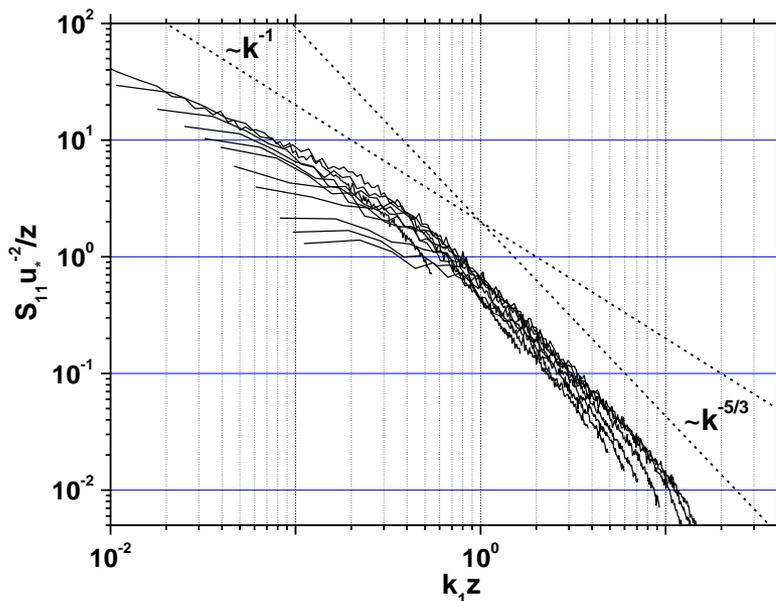
Используется свойство статистического подобия флуктуаций разных масштабов

Коэффициент, отвечающий за диссипацию



# Интерпретация результатов моделирования

Восстановление мелкомасштабных компонент скорости путем «обратной фильтрации»



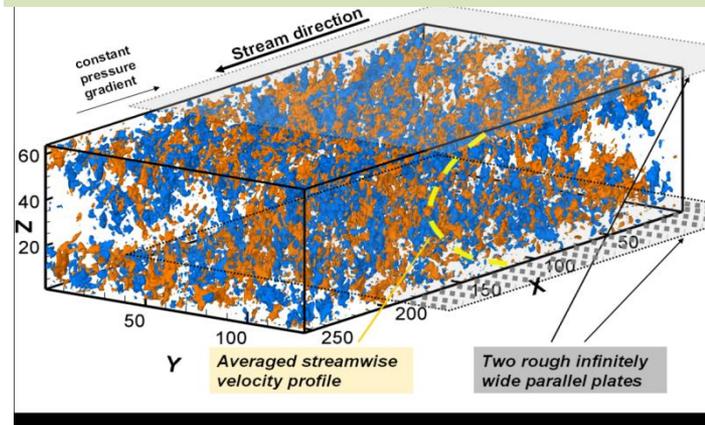
LES-модель ИВМ РАН



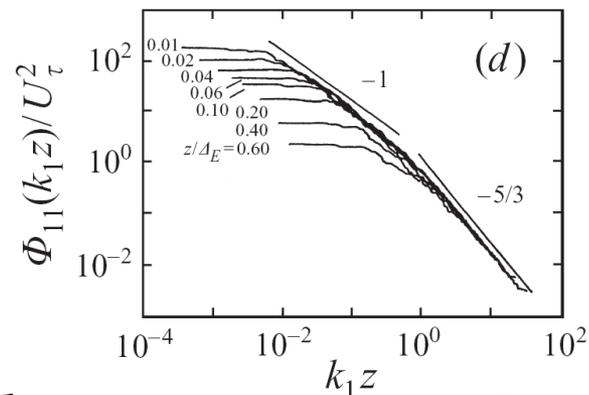
$$u_i^* = F_p^{-1} \bar{u}_i$$

## Тестирование модели

Турбулентное течение Пуазейля в канале  
Сравнение с DNS и лабораторными данными



Нормированные спектры продольной компоненты скорости на разном удалении от поверхности в пристеночном турбулентном течении



Лабораторные измерения Perry, 1986

$$\frac{dU}{dz} \frac{\kappa z}{U_*} = 1 \quad U = \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$$

Уравнения LES-модели в системе координат, связанной с направлением геострофического ветра.

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u_1 u_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + f_z \bar{u}_2 - \cos(\gamma) f_y \bar{u}_3,$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u_2 u_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} - f_z \bar{u}_1 + f_z U_g + \sin(\gamma) f_y \bar{u}_3,$$

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u_3 u_j}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \cos(\gamma) f_y \bar{u}_1 - \sin(\gamma) f_y \bar{u}_2 + F_b$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0.$$

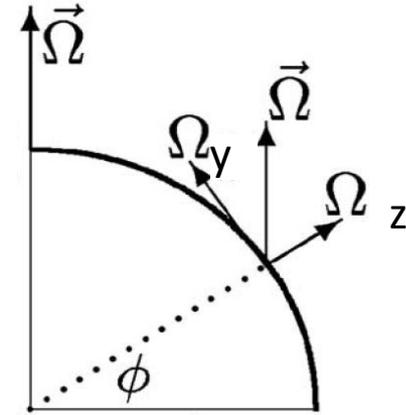
$$f_z U_g = -1/\rho_0 \partial \tilde{P} / \partial y \quad f_z = 2\Omega_z \text{ и } f_y = 2\Omega_y$$

$$\frac{\partial (-\langle u'_1 u'_3 \rangle)}{\partial t} = -\cos(\gamma) f_y (\langle u_1'^2 \rangle - \langle u_3'^2 \rangle) + \dots,$$

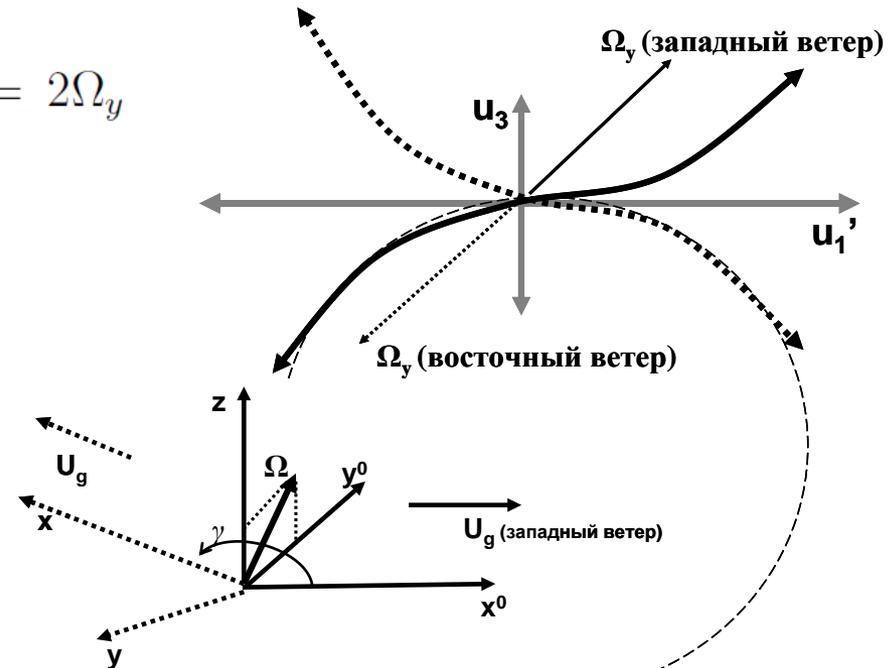
$$\frac{\partial \langle u'_2 u'_3 \rangle}{\partial t} = -\sin(\gamma) f_y (\langle u_2'^2 \rangle - \langle u_3'^2 \rangle) + \dots$$

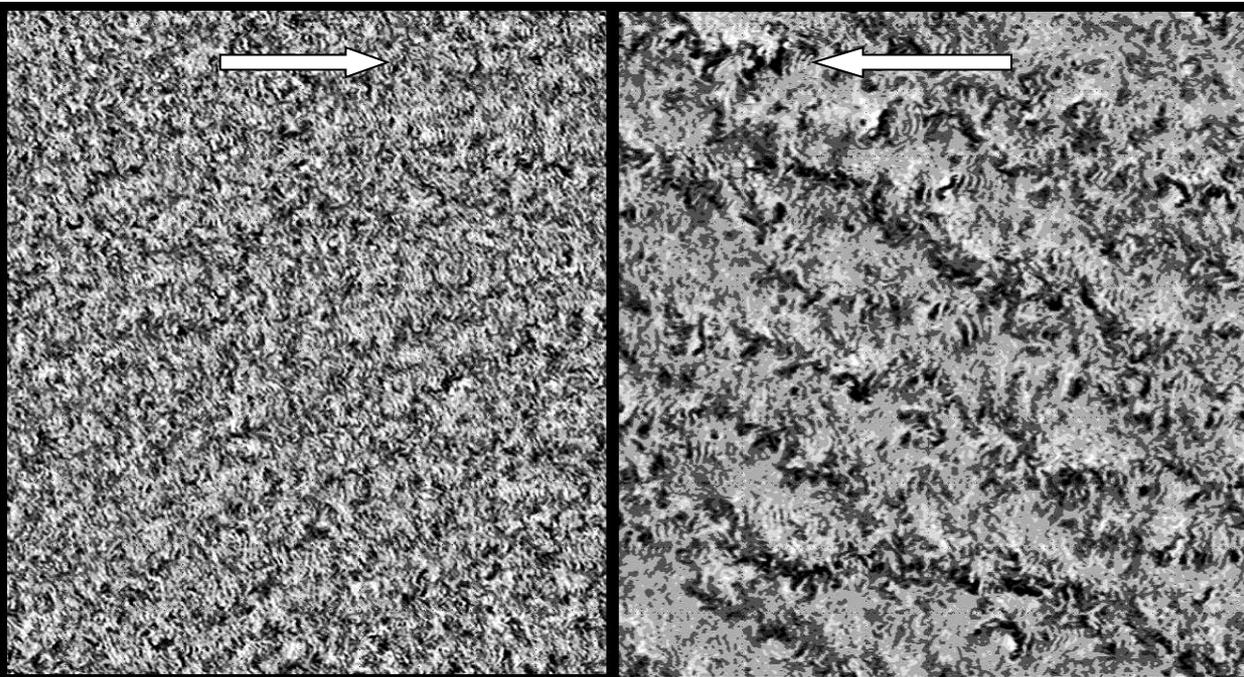
$$\langle u_1'^2 \rangle > \langle u_3'^2 \rangle, \quad \langle u_2'^2 \rangle > \langle u_3'^2 \rangle$$

При  $\sin(\gamma) < 0$  и  $\cos(\gamma) < 0$  эффект вращения вносит положительный вклад в абсолютную величину потока импульса (**северо-восточный ветер ( $180^\circ < \gamma < 270^\circ$ )**)

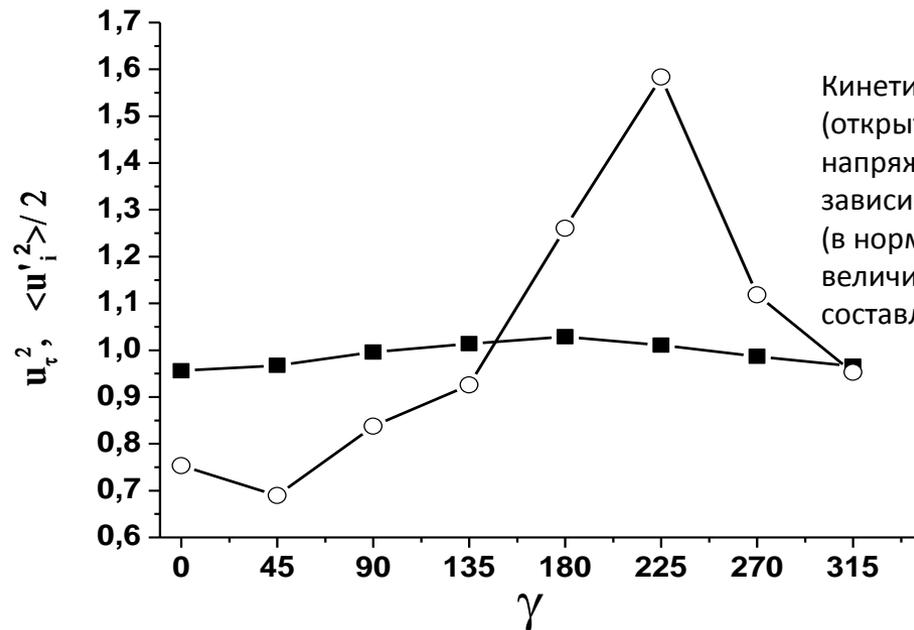


$$f_y = 2\Omega_y \quad f_z = 2\Omega_z$$





<http://www.brockmann-consult.de/CloudStructures>



Кинетическая энергия турбулентности (открытые кружки) и касательное напряжение на поверхности (квадратики) в зависимости от направления ветра (в нормировке на соответствующие величины без учета меридиональной составляющей угловой скорости)

# Моделирование растущего по высоте конвективного АПС.

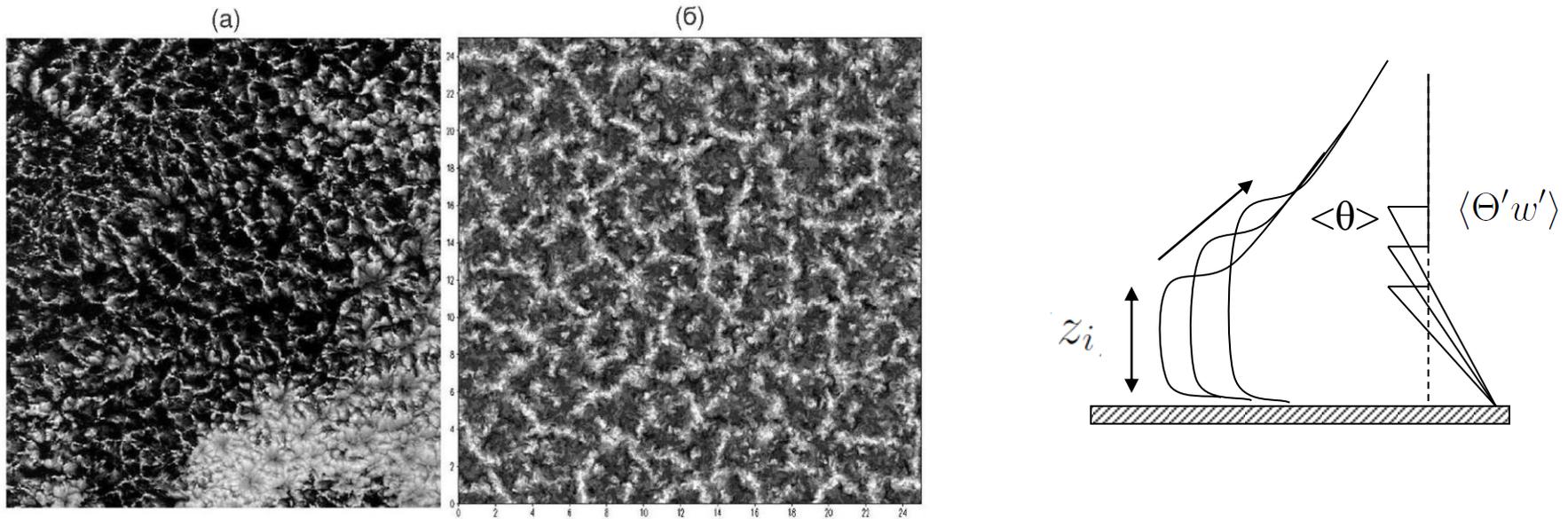


Рис. 3.6. Фотография облаков, связанных с конвективными ячейками в ППС над морем (а), и поле вертикальной скорости (на высоте  $z_i/2$ , где  $z_i$  - высота слоя инверсии), полученное при численном моделировании конвективного ППС (без облачности) с шагом сетки  $25 \times 25 \times 25 \text{ м}^3$  (области с восходящим течением отмечены более светлой штриховкой) (б).

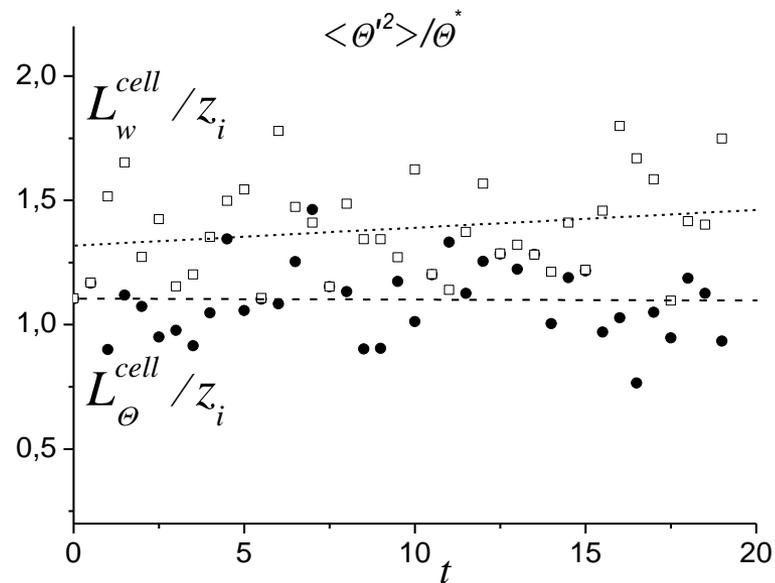
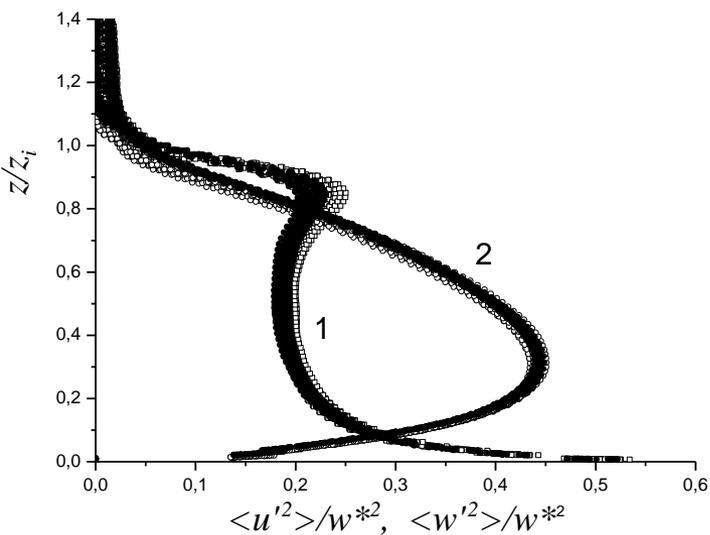
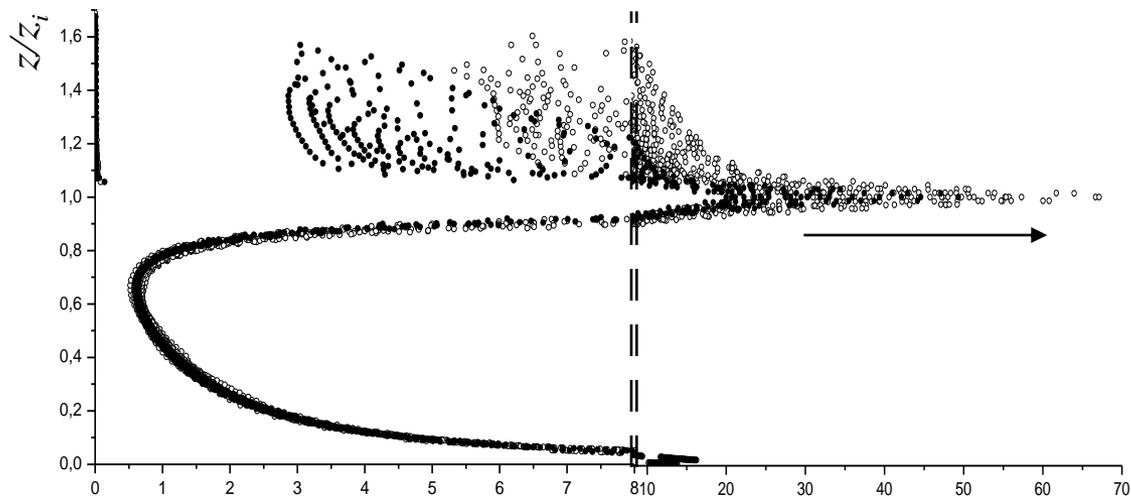
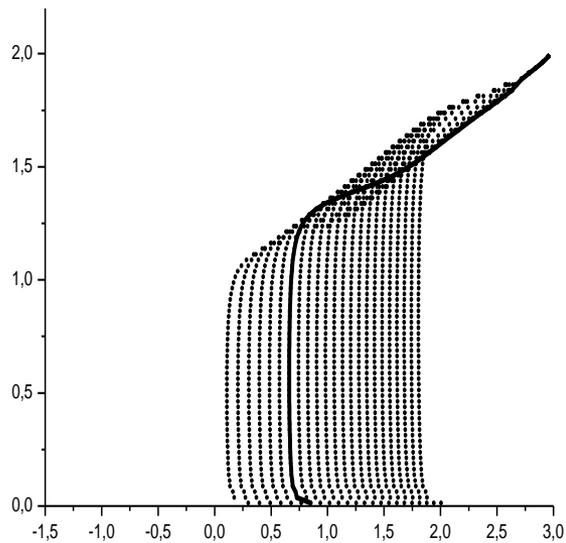
Теория подобия  
Дирдорфа



$$\begin{aligned}
 w^* &= (\alpha g)^{1/3} z_i^{1/3} \langle w' \Theta' \rangle_0^{1/3}, \\
 \Theta^* &= (\alpha g)^{-1/3} z_i^{-1/3} \langle w' \Theta' \rangle_0^{2/3}, \\
 t^* &= z_i / w^* = (\alpha g)^{-1/3} z_i^{2/3} \langle w' \Theta' \rangle_0^{-1/3}.
 \end{aligned}$$

# Растущий по высоте пограничный слой атмосферы

(соотношение сторон расчетной области 26 : 26 : 1)



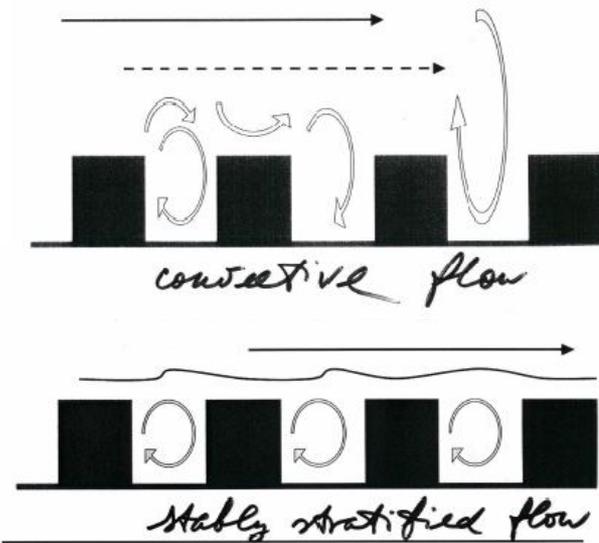
Масштабирование на высоту пограничного слоя и поток плавучести с поверхности приводит все характеристики к универсальному виду

Все горизонтальные масштабы растут пропорционально высоте ПСА

The Effect of Stratification on the Aerodynamic Roughness Length and Displacement Height

S. S. Zilitinkevich · I. Mammarella · A. A. Baklanov · S. M. Joffre

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \frac{z - d_{0u}}{z_{0u}} + \Psi_u \left( \frac{z}{L} \right) \right]$$



$$U(z) = \frac{u_*}{k} \left( \ln \frac{z - d_{0u}}{z_{0u}} + C_{U1} \frac{z - d_{0u}}{L} \right)$$

$$L = -u_*^3 / F_b$$

Выполняются ли обычные зависимости теории подобия Монина-Обухова в турбулентных стратифицированных потоках над крупными объектами и если выполняются, то зависят ли аэродинамические характеристики таких поверхностей от стратификации ?

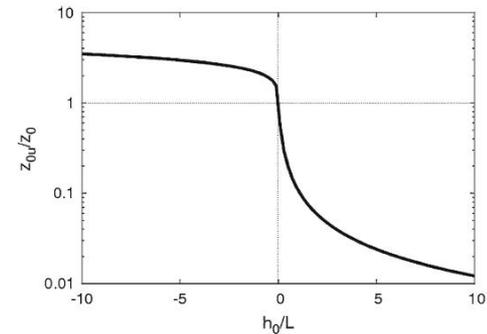


Fig. 6 Stability dependence of the roughness length. The curve shows  $z_{0u}/z_0$  versus  $h_0/L$  in the meteorological interval  $-10 < h_0/L < 10$  after Eqs. 12 and 15 with  $C_{ZS} = 8.13$  and  $C_{ZC} = 1.15$

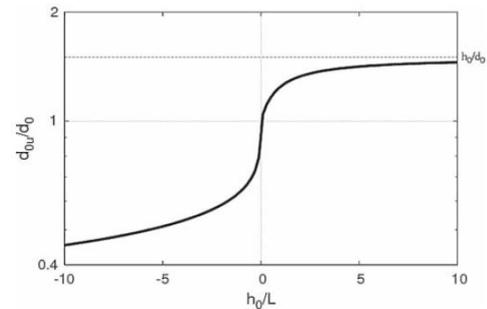


Fig. 7 Stability dependence of the displacement height. The curve shows  $d_{0u}/d_0$  versus  $h_0/L$  in the meteorological interval  $-10 < h_0/L < 10$  after Eqs. 16 and 17 with  $C_{DS} = 1.05$  and  $C_{DC} = 0.56$ . The dashed line shows the ultimate upper limit,  $d_{0u} = h_0$  (corresponding to our estimate of  $d_0 = 2h_0/3$  for boreal forest)

# Нейтральная стратификация

(определение параметра шероховатости и высоты вытеснения для разных конфигураций объектов на поверхности)

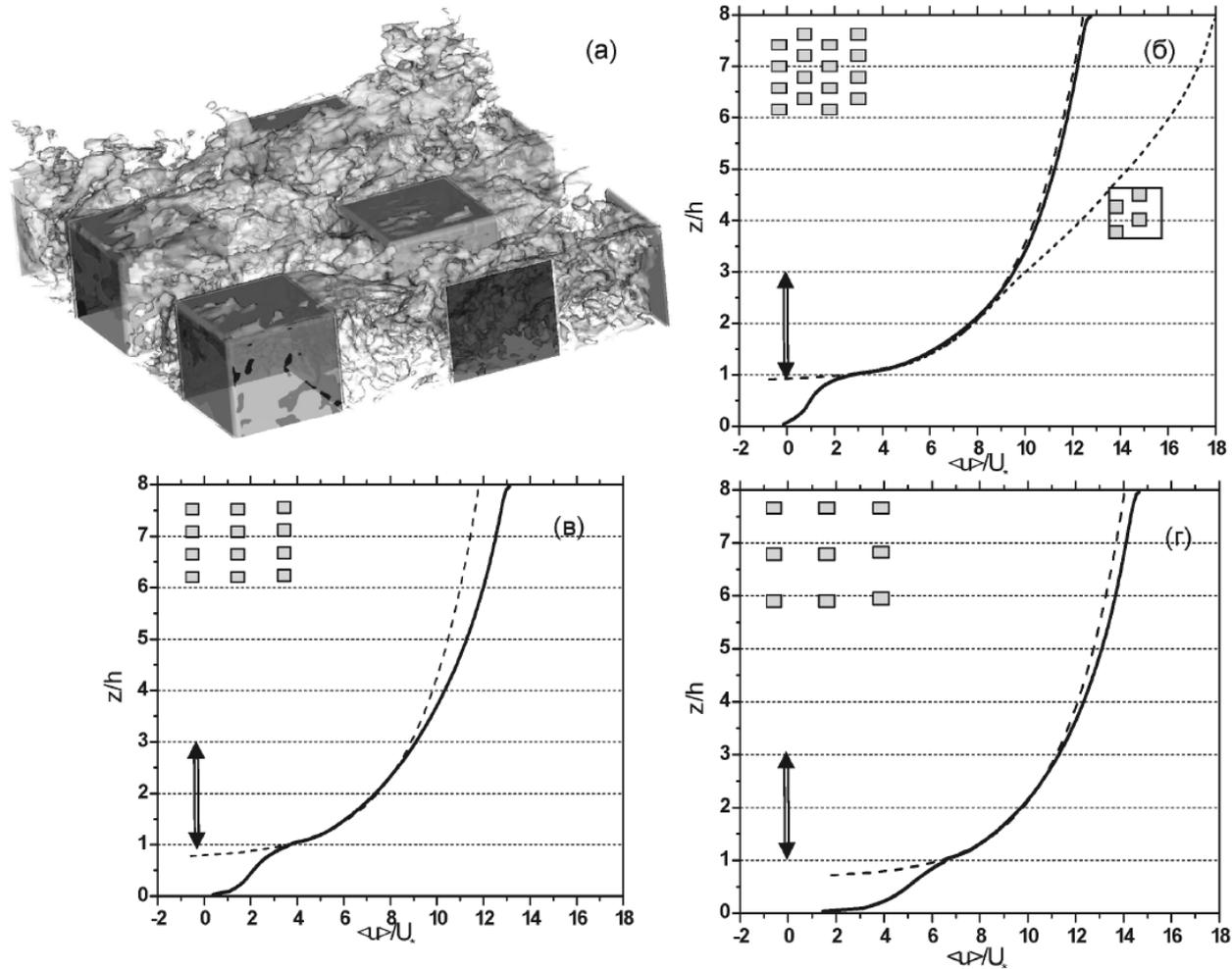
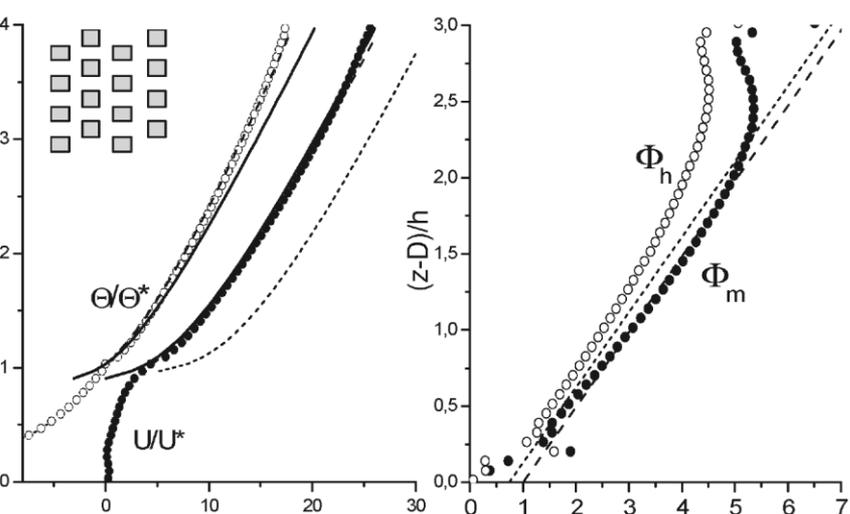


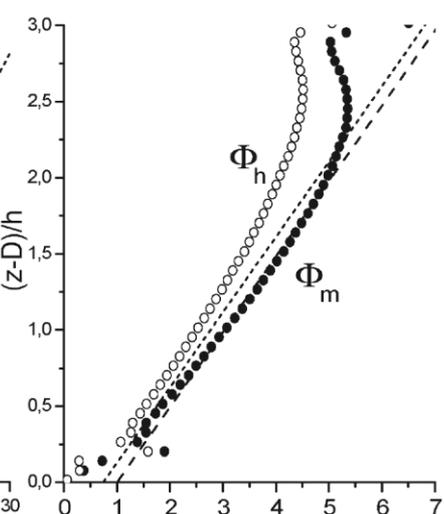
Рис. 4.1. (а)- периодически повторяющийся фрагмент расчетной области и изоповерхности модуля скорости ветра, взятые из расчета  $Exp_{n1}$ ; (б) - средняя скорость ветра в  $Exp_{n1}$  - сплошная линия, в  $Exp_{n1}^{sd}$  - короткий пунктир; (в,г) - средняя скорость ветра в  $Exp_{n2}$  и в  $Exp_{n3}$ . Длинным пунктиром нанесены логарифмические профили скорости  $U_m$  с соответствующими каждому из расчетов значениями  $z_0$  и  $D$ .

1. Параметры, имеющие размерность длины и характеризующие свойства поверхности,  $z_0$  (параметр шероховатости) и  $D$  (высота вытеснения) не зависят от стратификации.

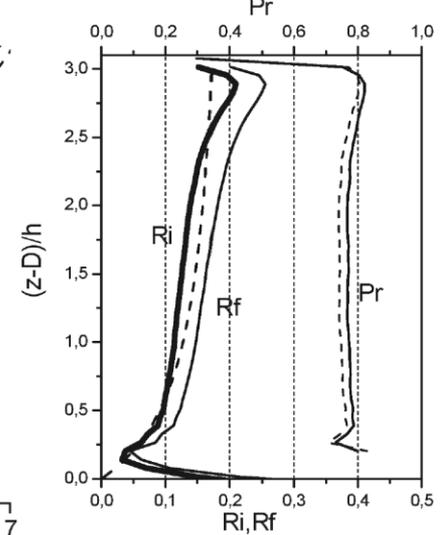
(a)



(б)



(B)



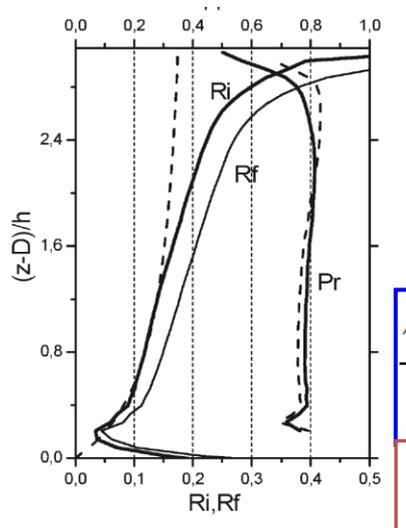
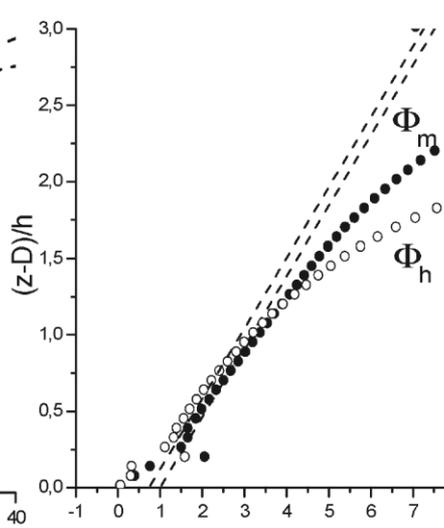
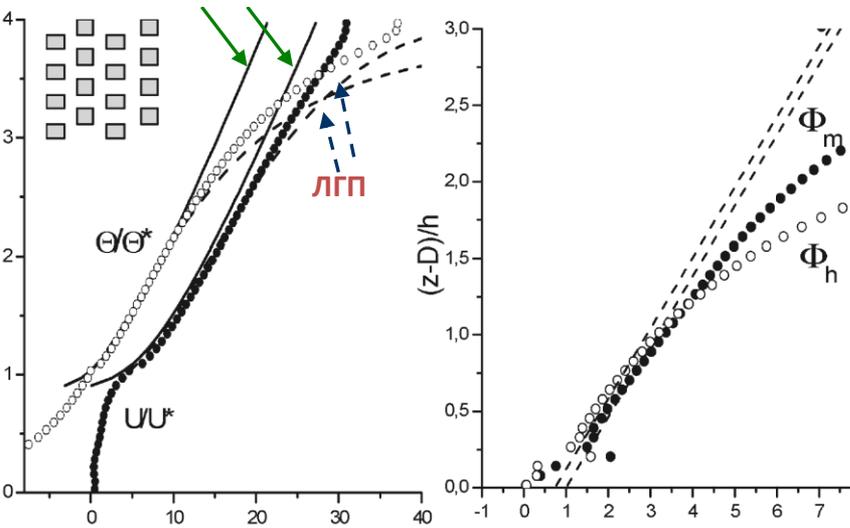
**ТПМО** ← Поток у поверхности

$$L = - \frac{U_*^3 \Theta_0}{g Q_s}$$

$\xi = z_e / L$  ← безразмерный параметр

$$\frac{d\langle u \rangle}{dz} \frac{z}{U_*} = \Phi_m(\xi) = \frac{1}{\kappa} + C_m \xi$$

z/h



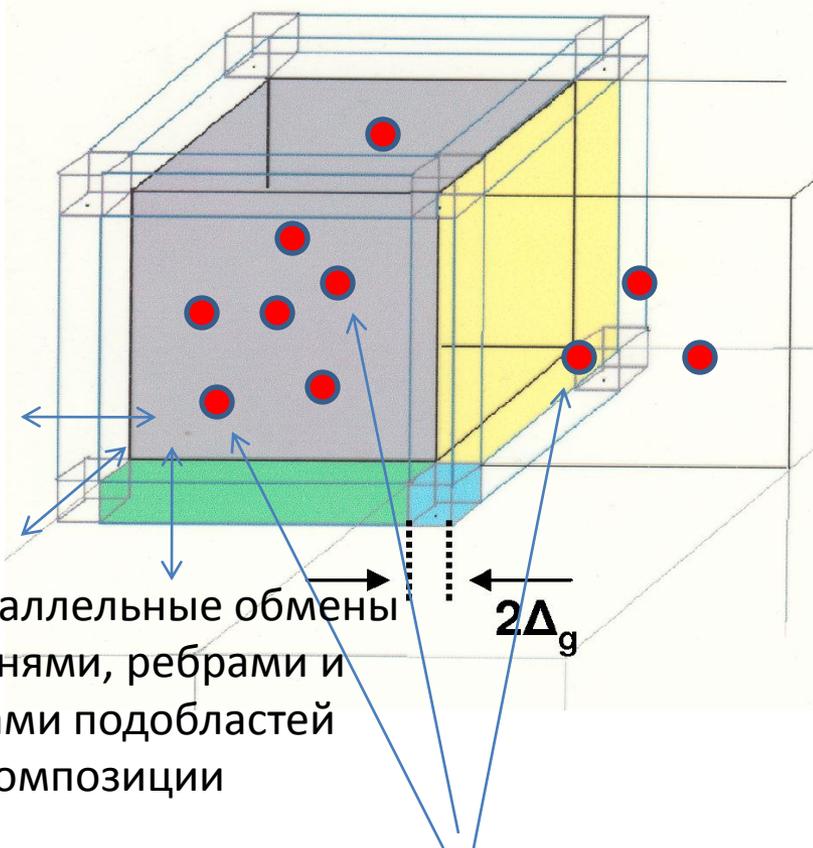
**ЛГП** ← Поток на текущей высоте

$$\Lambda(z) = - \frac{|\tau(z)|^{3/2} \Theta_0}{g Q(z)}$$

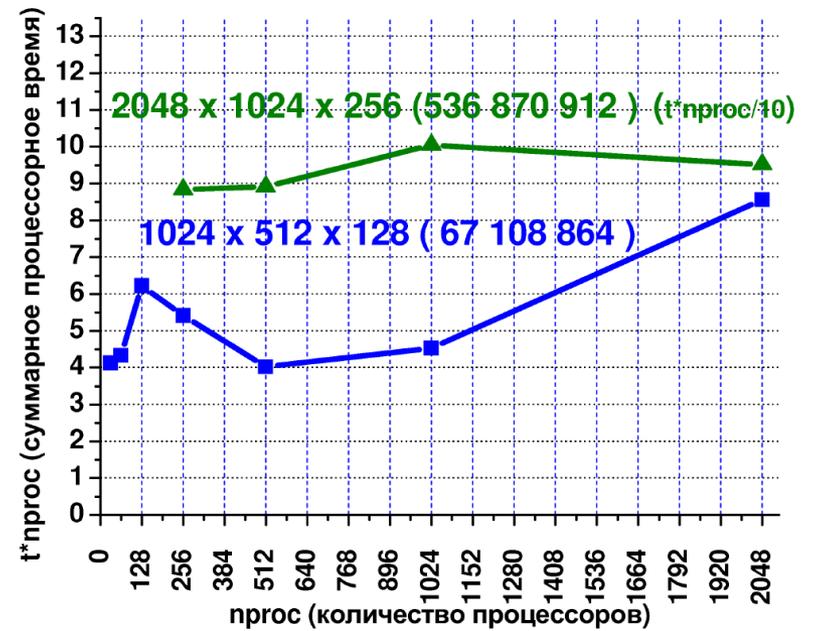
$\frac{z_e}{\Lambda}$  ← безразмерный параметр

$$\phi_m(z_e/\Lambda) = \left| \frac{d\langle u \rangle}{dz} \right| \frac{z_e}{|\tau|^{1/2}} \approx \frac{1}{\kappa} + C_m^\Lambda \frac{z_e}{\Lambda}$$

Параллельная реализация - MPI,  
трехмерная декомпозиция расчетной  
области

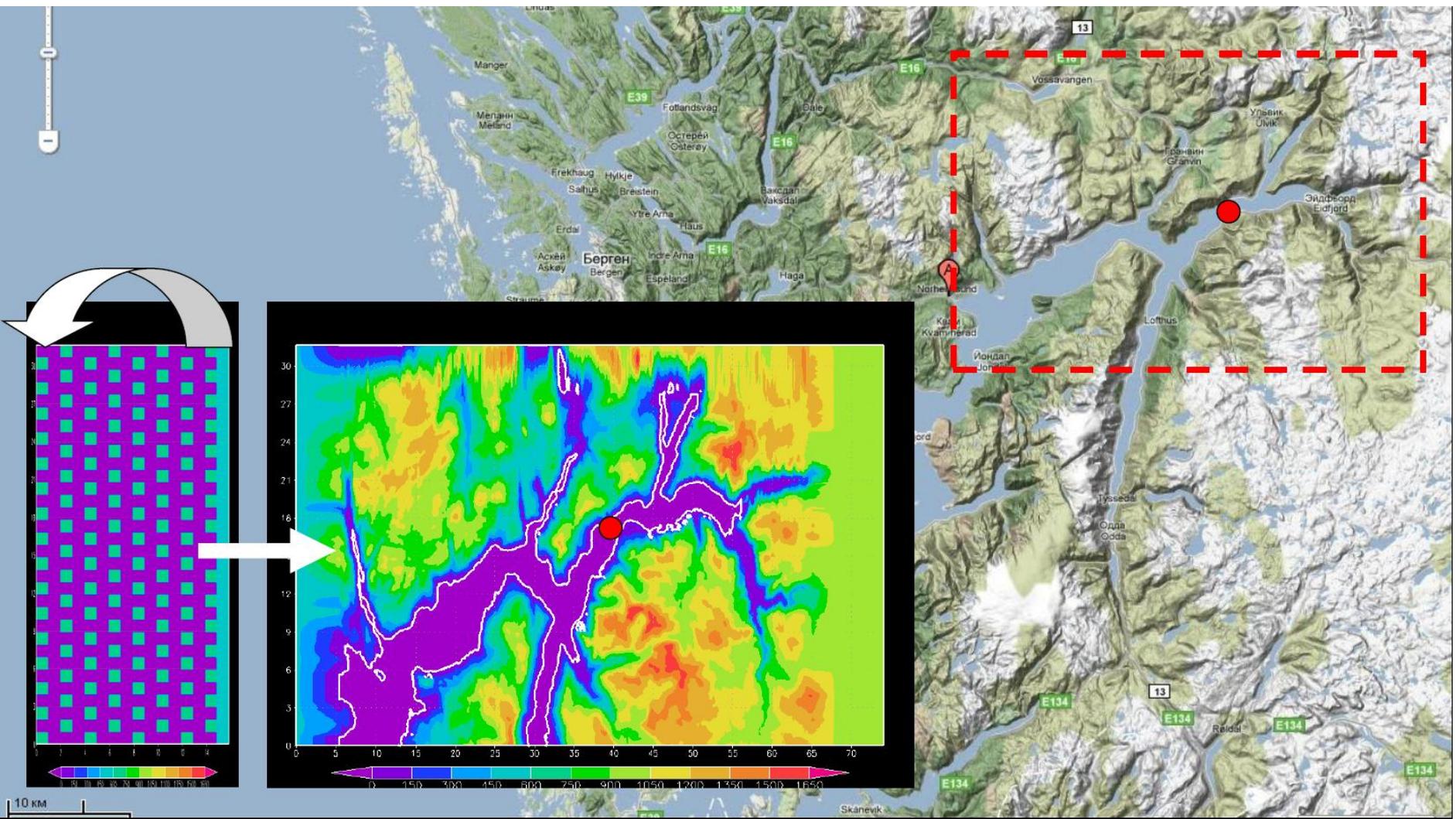


Лагранжев перенос частиц (параллельные обмены частицами)



# Примеры использования LES-модели в прикладных задачах

## Моделирование порывов ветра в норвежском фьорде



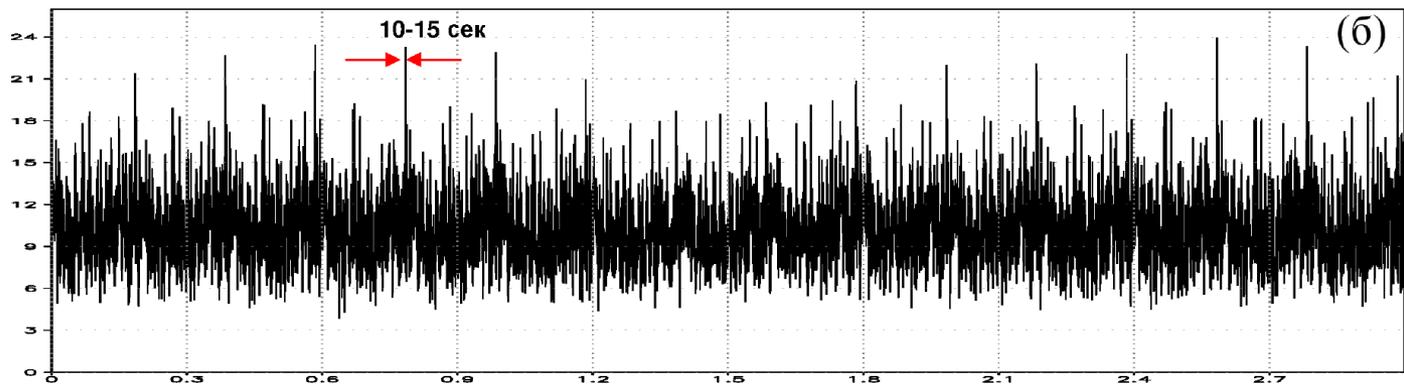
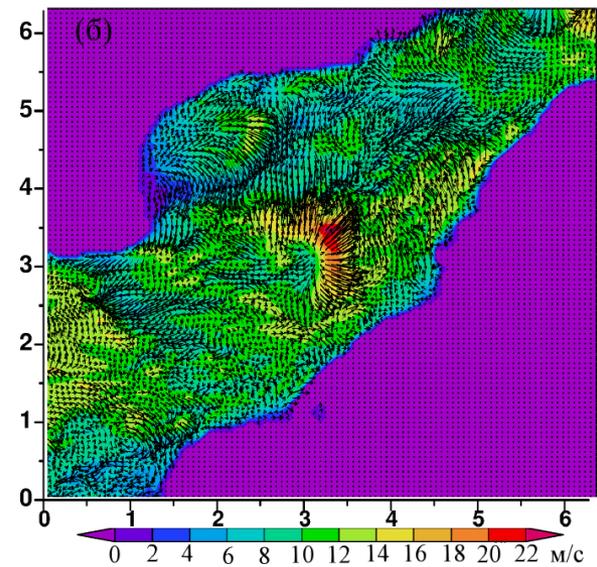
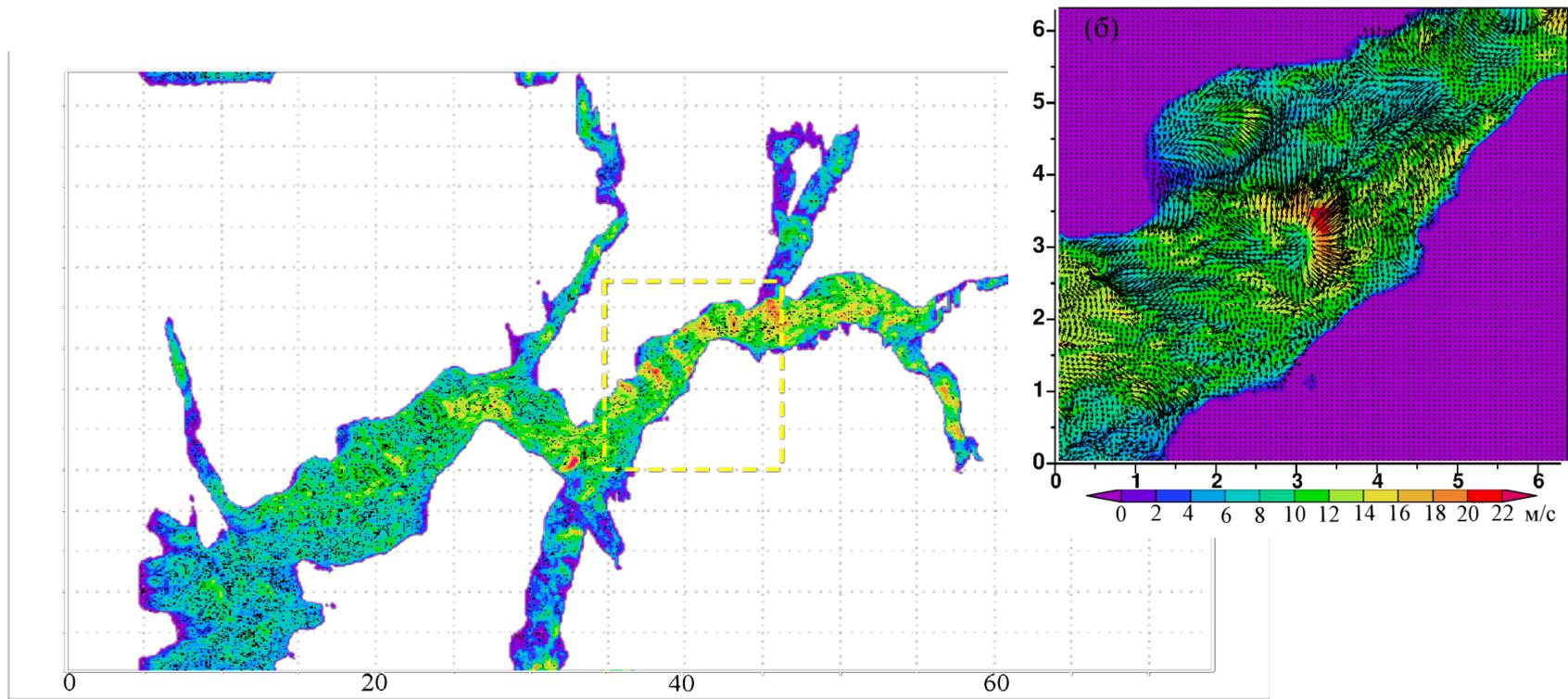


Рис. 5.18. Модуль скорости ветра у поверхности воды (а); временной ряд  $\bar{u}(t)$  за 3 часа модельного времени в одной из точек вблизи предполагаемого сооружения(б)

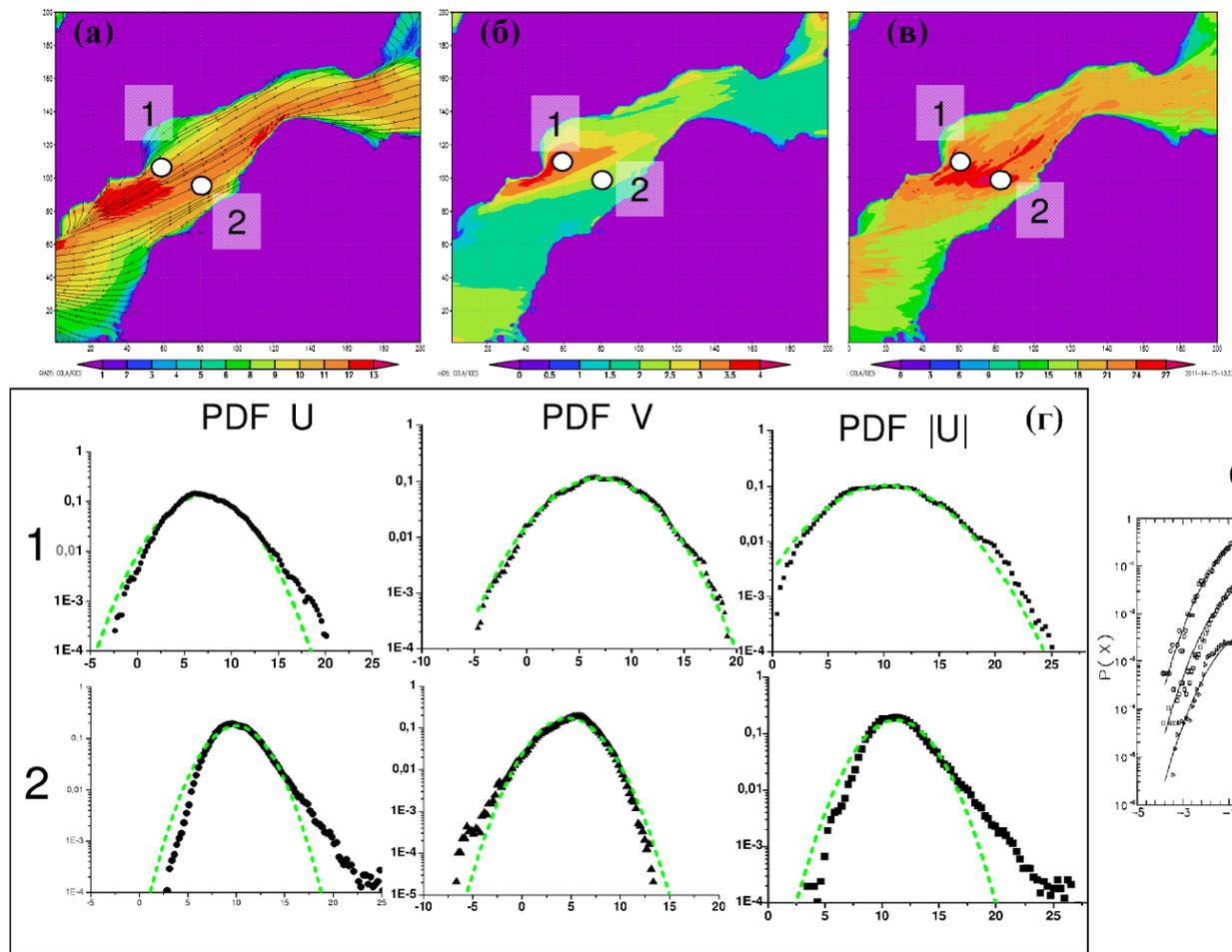
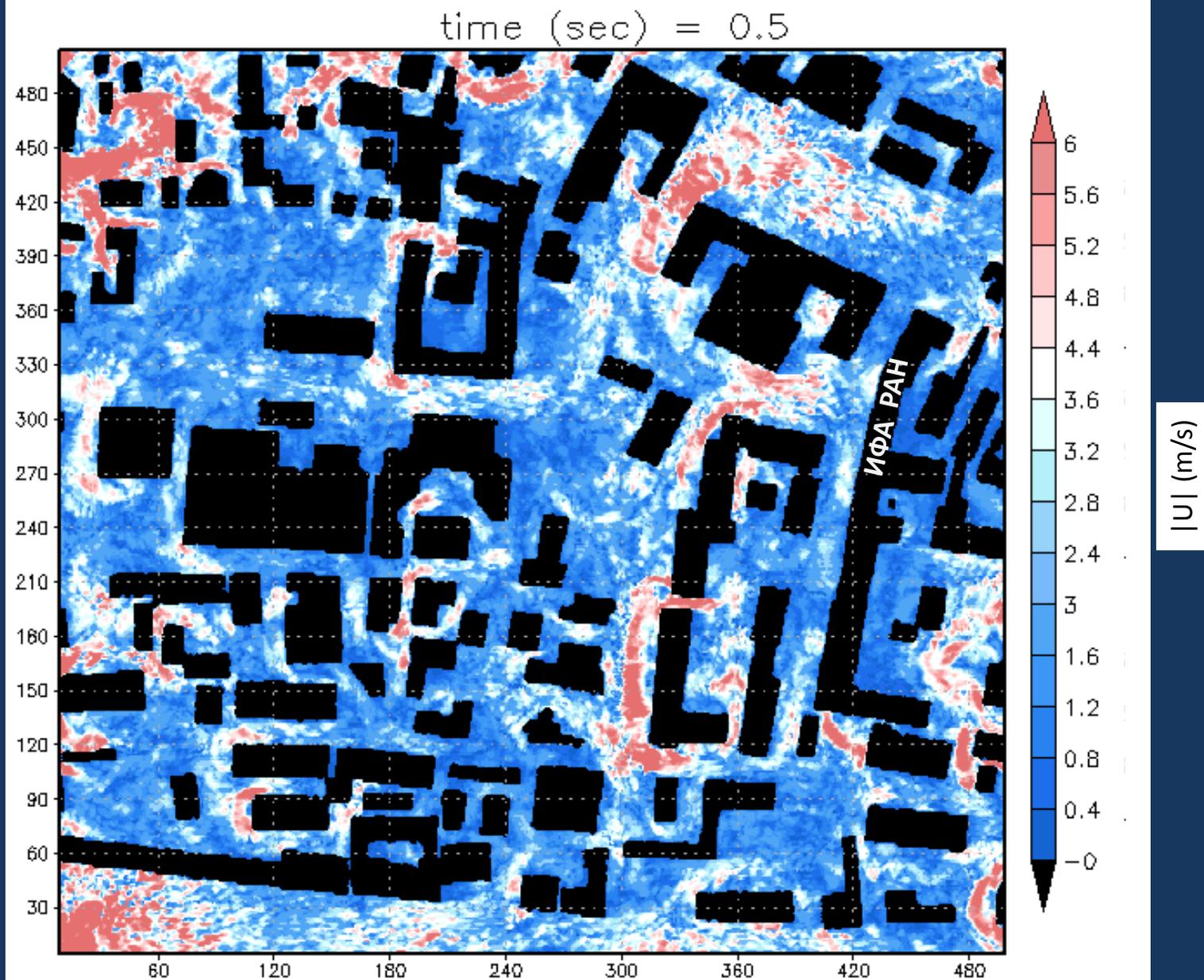


Рис. 5.20. (а) - средняя скорость ветра  $|\langle \mathbf{u} \rangle|$  у поверхности и линии тока; (б) СКО скорости ветра; (в) - максимальная сила ветра, зафиксированная за 6 часов расчета; (г) гистограммы распределения двух компонент скорости и модуля скорости (черные символы), нормальное распределение вероятностей с соответствующими средними значениями и СКО (зеленые пунктирные кривые), сверху - для точки **1**, внизу - для точки **2**; (д) рисунок из [79] - измеренные в ПСА PDF продольной компоненты скорости для нейтральной (кружки), устойчивой (треугольники) и неустойчивой (квадратики) стратификации.

# LES-модель ИФФ РАН - расчет турбулентного обтекания городской застройки, модуль скорости ветра на высоте 0.5 м



# Перенос примеси; Лагранжев подход

Одновременно с расчетом динамики турбулентного потока рассчитываются траектории отдельных частиц примеси.

Частицы могут быть рассортированы по группам, согласно их размеру и массе.

Можно учесть различие между скоростью частицы и скоростью ветра

На параллельных вычислительных системах Лагранжев подход позволяет одновременно с расчетом ветра вычислить траектории  $10^8$ - $10^{10}$  частиц.

Компьютерные затраты необходимые для этого сравнимы с затратами на расчет динамики.

При достаточно большом количестве трассеров в любой момент времени может быть рассчитано пространственное распределение концентрации примеси.

Уравнение движения частицы примеси в потоке воздуха

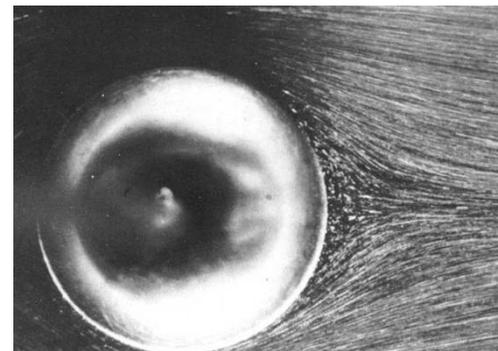
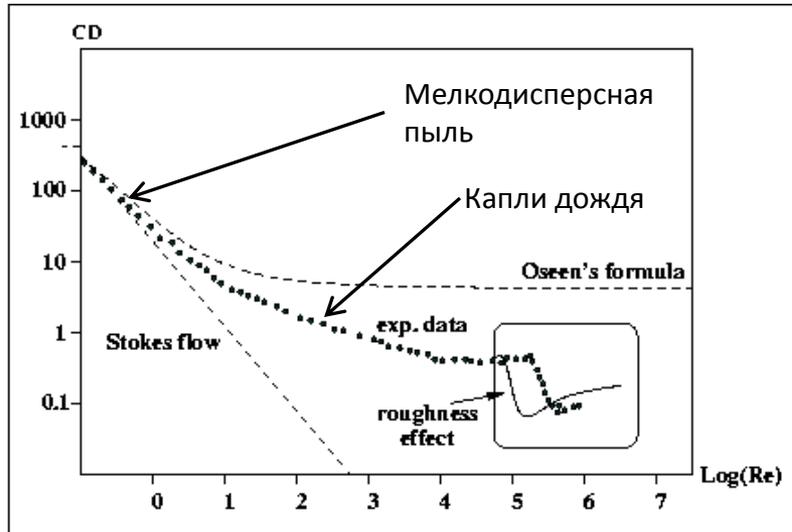
$$m\ddot{x}_i = f_i + \delta_{iz}mg$$

Сила сопротивления

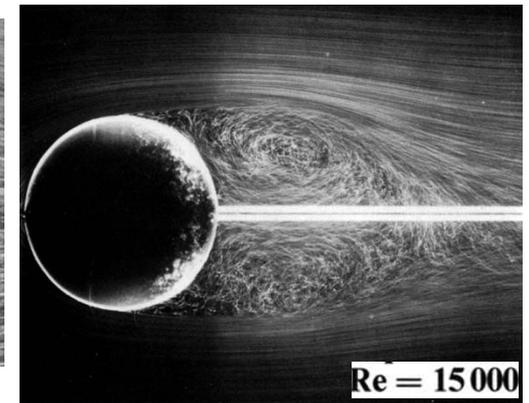
Для малых чисел Рейнольдса справедлива формула Стокса:

$$Re_p = 2r(u_i - \dot{x}_i)/\mu$$

$$f_i = 6\pi r\mu(u_i - \dot{x}_i)$$



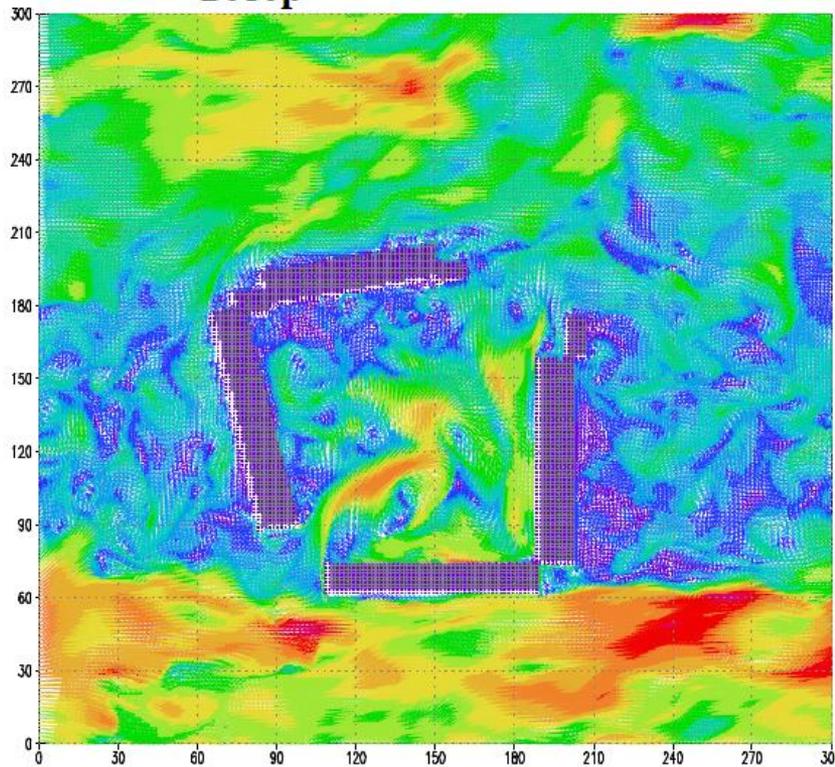
$Re = 26,8$



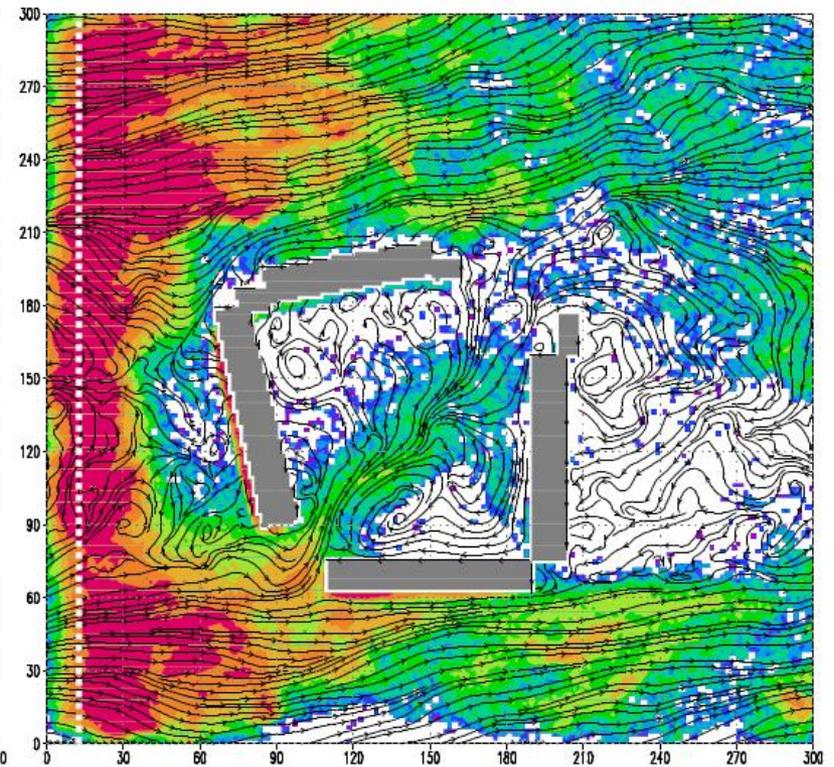
$Re = 15000$

**Пример расчета переноса мелкодисперсной примеси турбулентным потоком воздуха между зданиями**

**Концентрация примеси**



→  
6



**Частицы выбрасывались возле поверхности земли (вдоль пунктирной линии).  
Максимальное количество частиц во время расчета ~ 10 000 000.**

# Лагранжев перенос трассеров. Стохастические модели

Обобщенное уравнение Ланжевена (Броуновское движение частицы)

$$du_i'^p = a_i(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p, t)dt + b_{ij}(\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p, t)\xi_j^p$$

$$d\mathbf{x}^p = \mathbf{u}^p dt \quad u_i^p = \langle u_i^{(p)} \rangle + u_i'^p$$

$\xi$  - дельта-коррелированный (обычно Гауссов) случайный шум

$$\langle \xi_i^p(t)\xi_j^h(t+\tau) \rangle = \delta_{ij}\delta_{ph}\delta(\tau)dt$$

Универсальная константа  $\sim 6 \pm 0.5$

$$D(\tau) = \langle w(t+\tau)w(t) \rangle = C_0\epsilon\tau \quad \xrightarrow{\text{Теория К-41}} \quad b_{ij} = \delta_{ij}\sqrt{C_0\epsilon}$$

Для однородной изотропной турбулентности:

$$a_i^p = -\frac{u_i^p}{T_L}, \quad T_L = \frac{4}{3} \frac{E}{C_0\epsilon}$$

Для неоднородной турбулентности обычно применяется условие «хорошего перемешивания» (Tomson, 1987), следующее из соотношения между плотностью вероятности лагранжевой скорости и плотностью вероятности эйлеровой скорости:

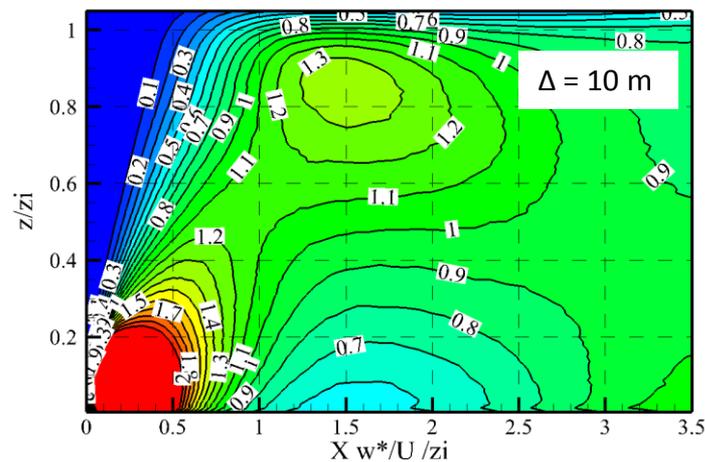
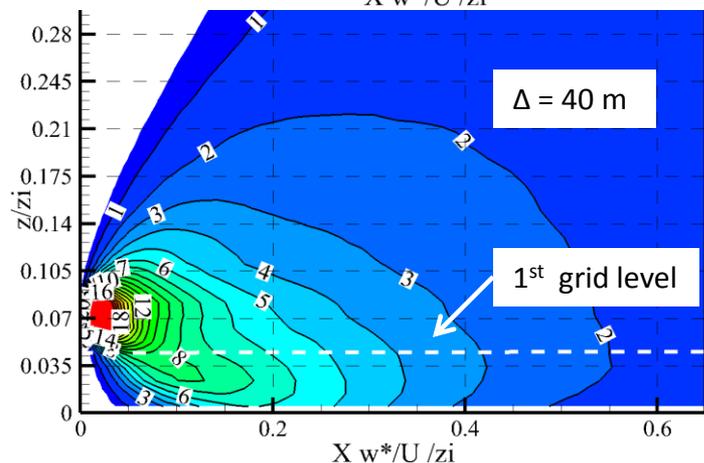
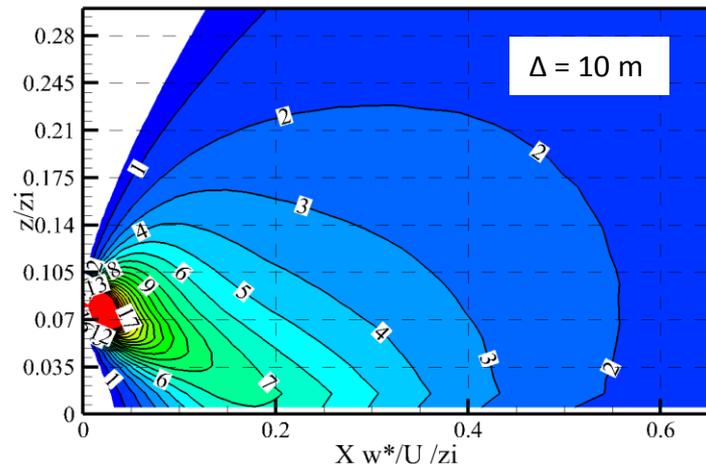
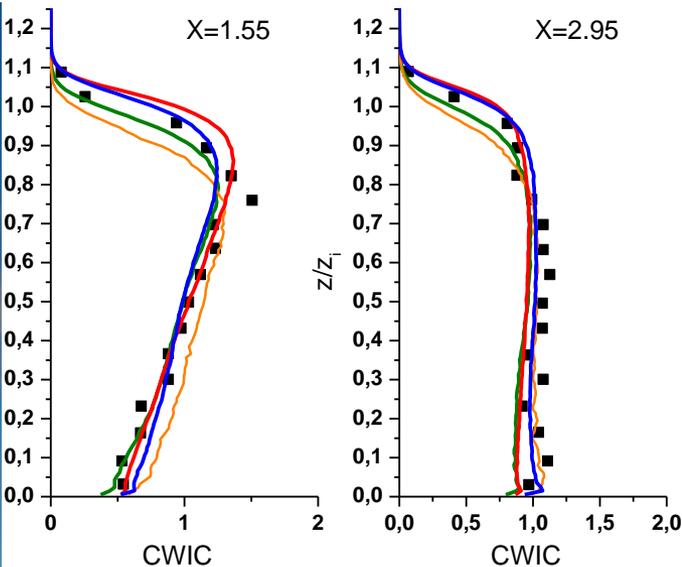
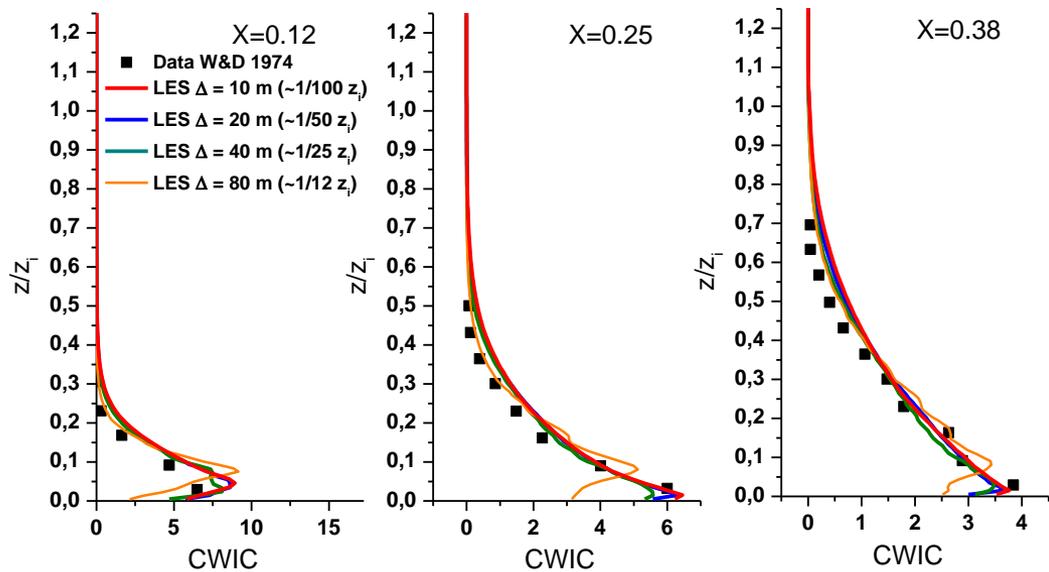
$$p_E(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \int_{R^3} p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^p, t | \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0$$

**Стохастические модели могут применяться в LES для описания флуктуаций скорости частицы, связанных с «подсеточной» турбулентностью**

# Сравнение с лабораторными данными

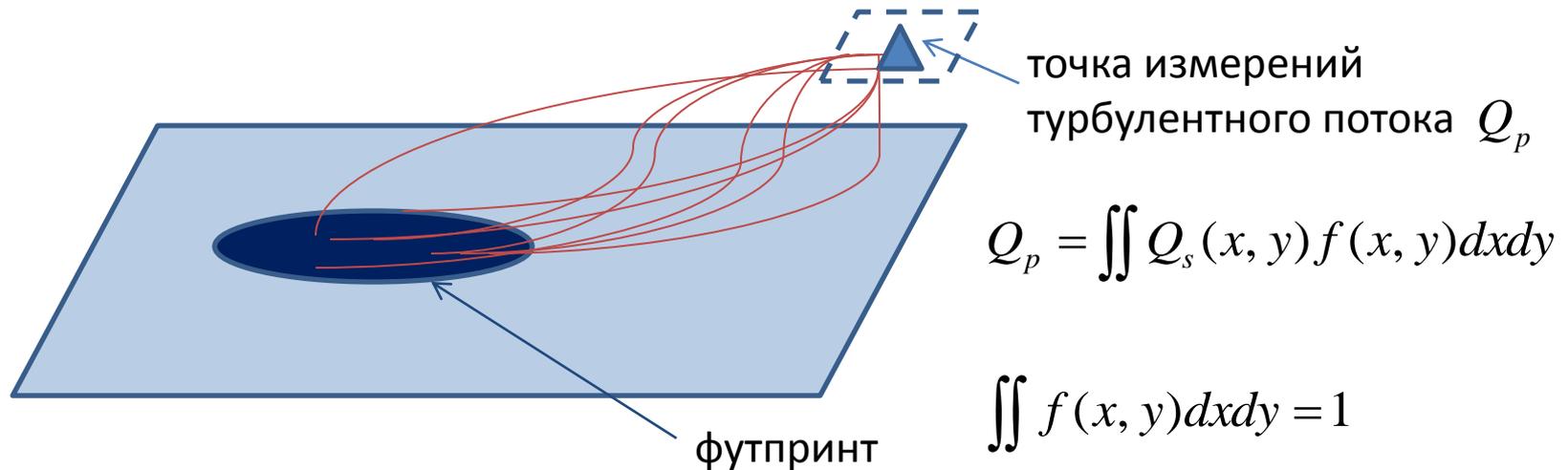
(Конвективный АПС - Масштаб Обухова  $L \sim 10\text{м}$ , высота АПС  $z_i \sim 1000\text{ м}$ )

Концентрация примеси не расстоянии от приподнятого над поверхностью источника.



# Определение функции «футпринта» $f(x, y)$

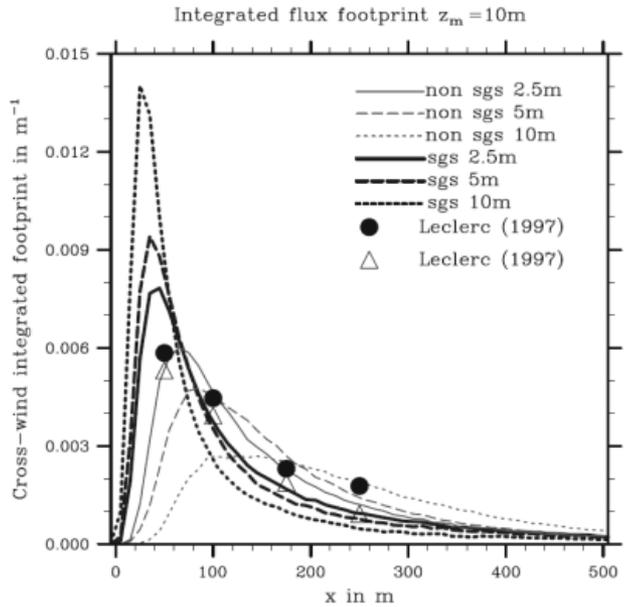
## Лагранжев перенос трассеров в LES-модели



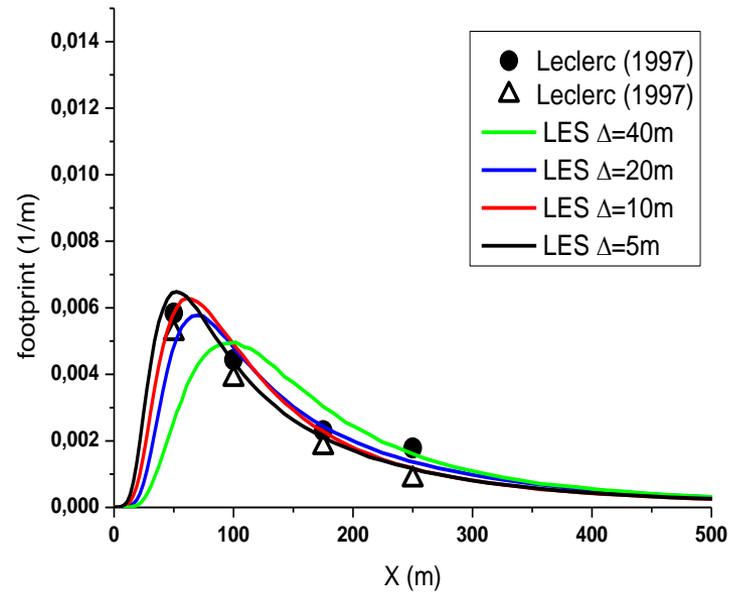
Над однородной поверхностью –  
статистически значимый результат можно получить при помощи осреднения  
по пространству

Над неоднородной поверхностью (над «озером»)–  
Требуется большое количество трассеров ( $\sim 10^2$  на каждую ячейку сетки модели)  
и длительное время интегрирования

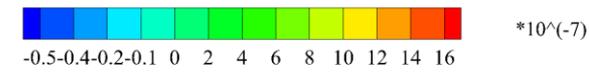
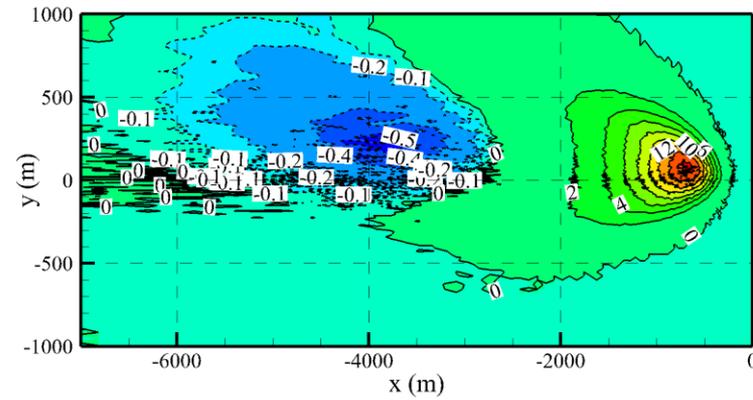
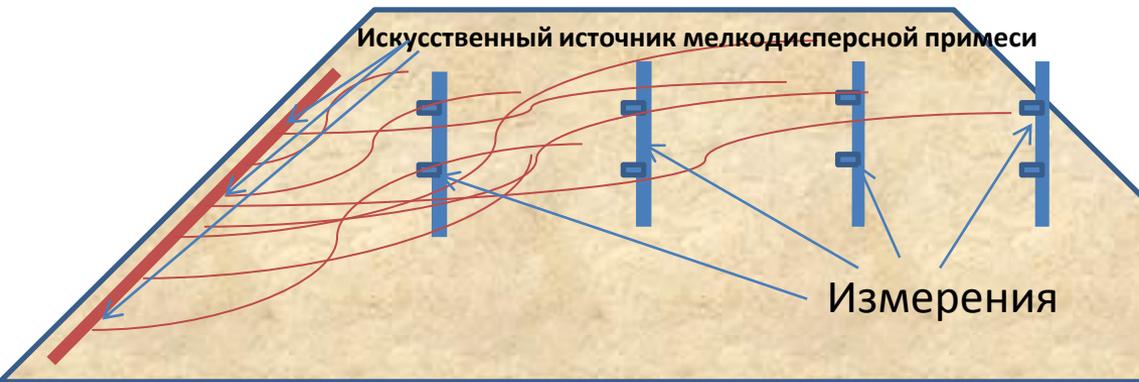
# Сравнение с данными наблюдений, футпринт потока скаляра, конвективный АПС



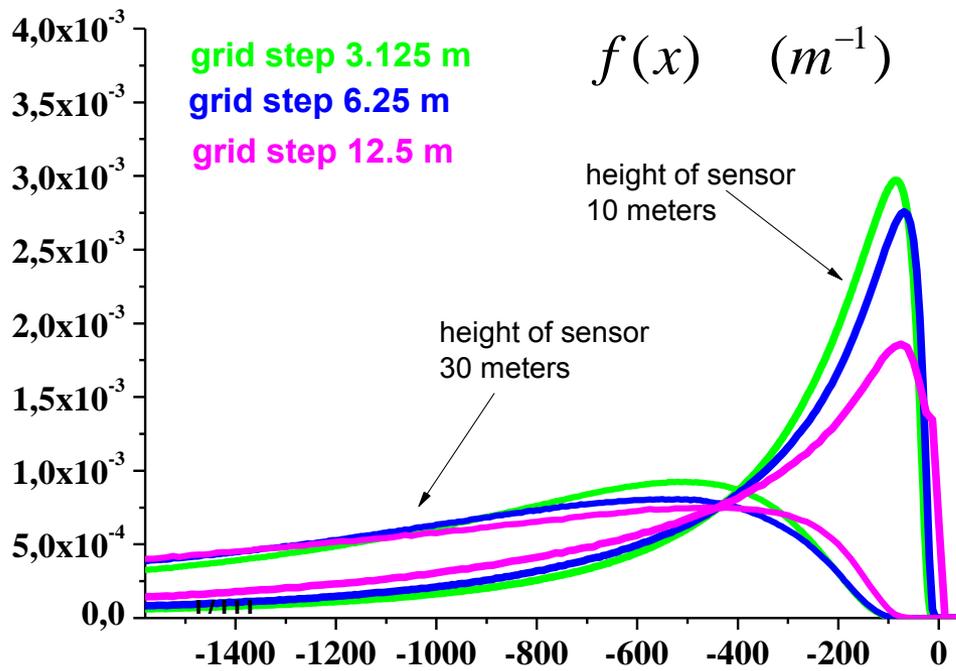
PALM (Steinfeld et al. 2008)



LES IBM PAH



Leclerc MY, Shen SH, Lamb B (1997) Observations and large-eddy simulation modeling of footprints in the lower convective boundary layer. J Geophys Res Atmos 102:9323–9334



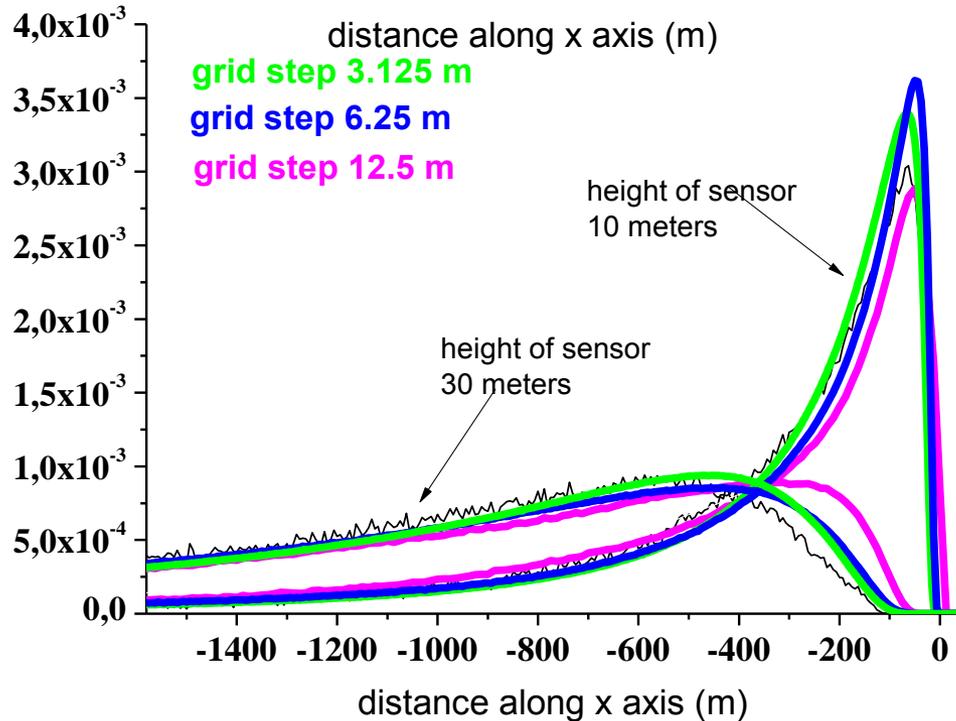
Частицы переносятся в модельном (фильтрованном) поле скорости

$$u_i^* = F_p^{-1} \bar{u}_i$$

Устойчиво – стратифицированный АПС

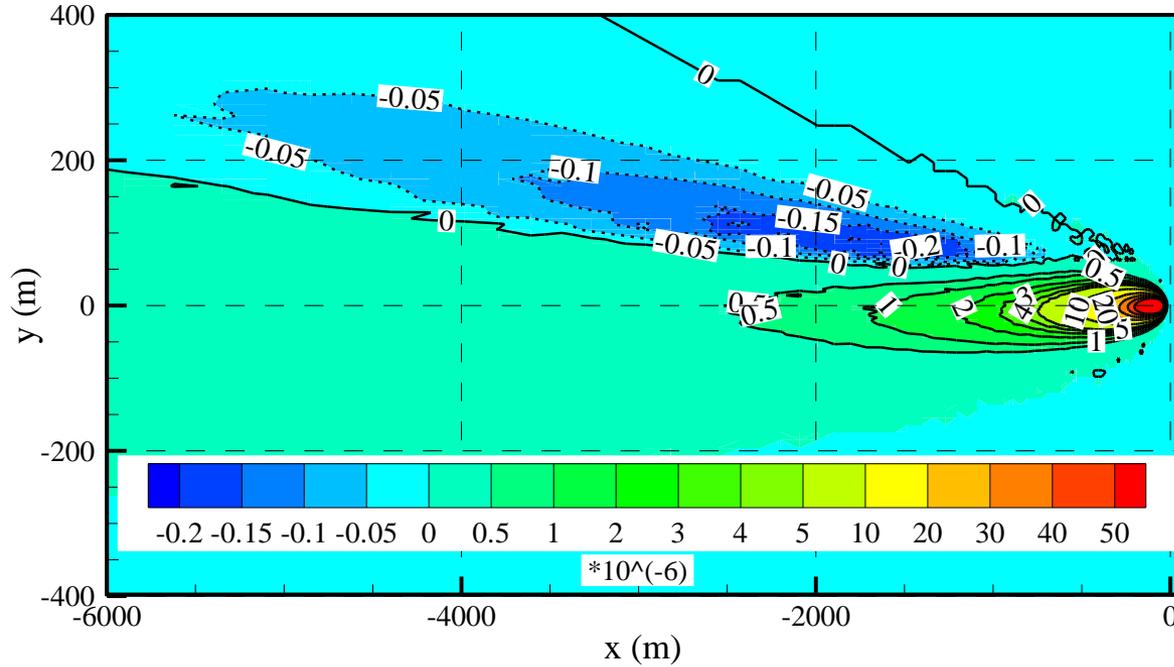
Турбулентность носит мелкомасштабный характер – требования к качеству LES-моделей возрастают

Трудно измерить «футпринты» экспериментально – их протяженность увеличивается

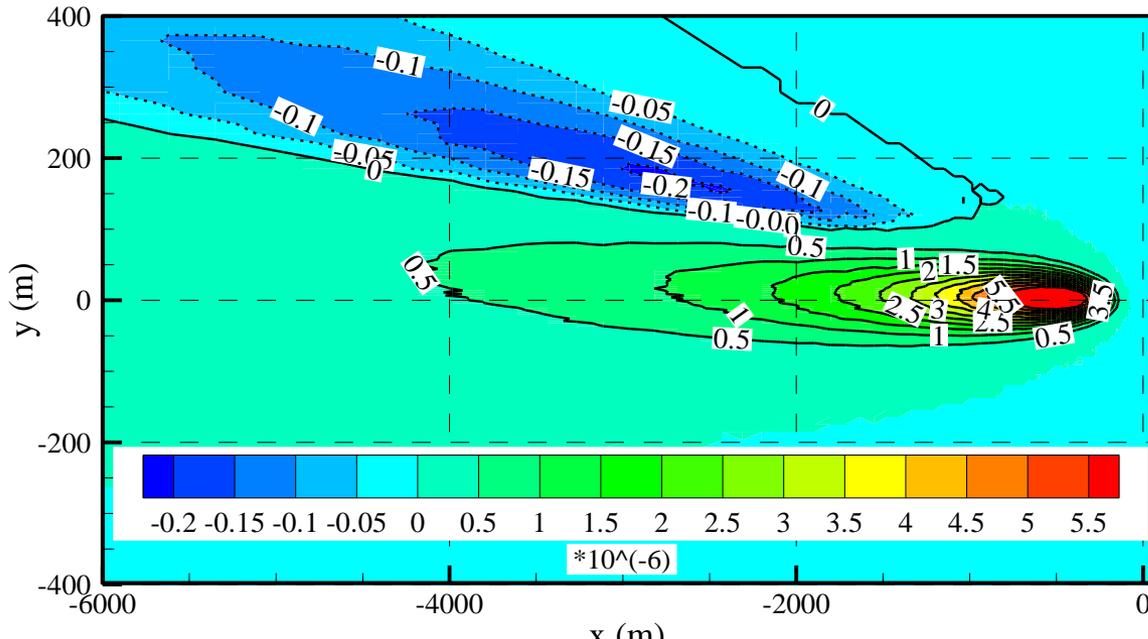


Частицы переносятся в восстановленном поле скорости

Вычисляя траектории большого количества частиц ( $\sim 10^8$ ) можно определить двумерную функцию футпринта потока с поверхности для измерений на разных высотах.



Sensor at 10m



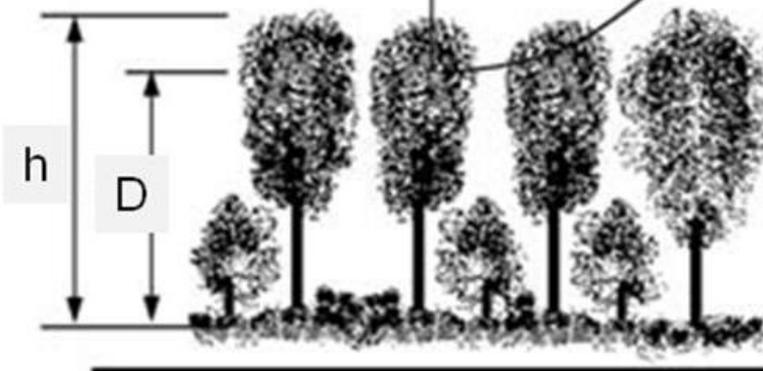
Sensor at 30m

Высота вытеснения

$$\langle U \rangle = \frac{U_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z - D}{z_{ow}} \right)$$

Параметр шероховатости

Растительность



Средняя скорость ветра

$z_{ow} \gg z_{ol}$

Озеро

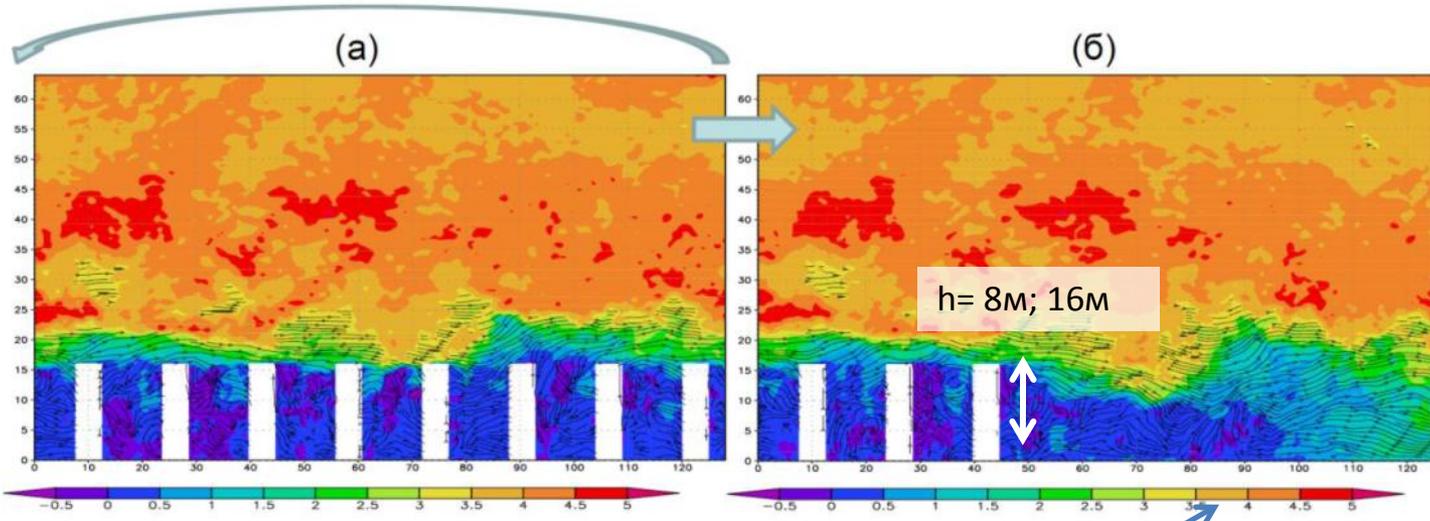
$$D \sim 0.7 - 0.9 h \sim 10 m$$

$$z_{ow} \sim 0.05 h \sim 0.5 m$$

$$z_{ol} \sim 10^{-3} - 10^{-4} m$$

Потоки тепла,  
импульса,  
 $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $H_2O$ ...

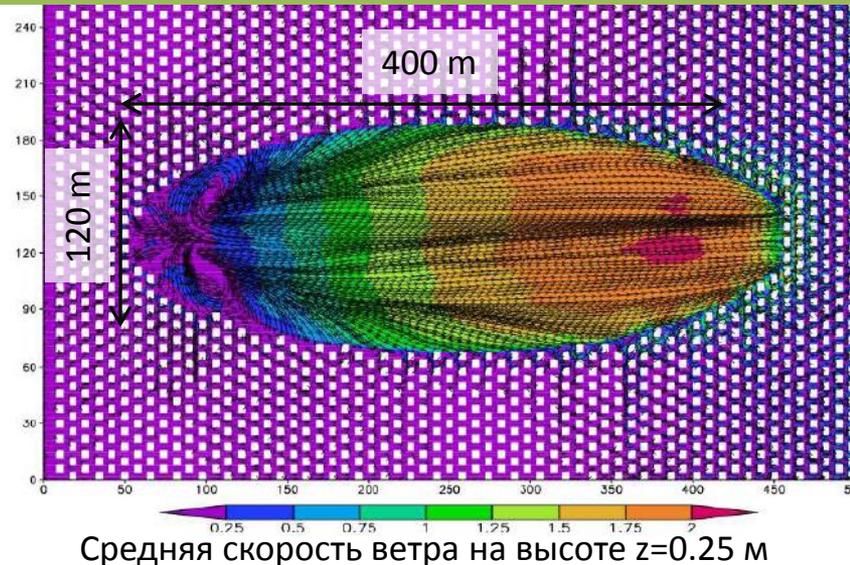
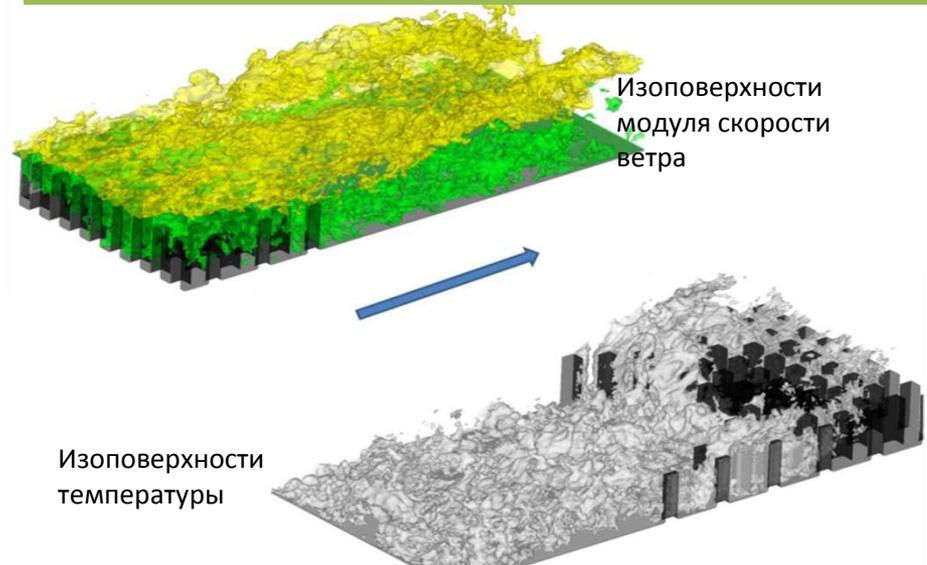
Измерения ?



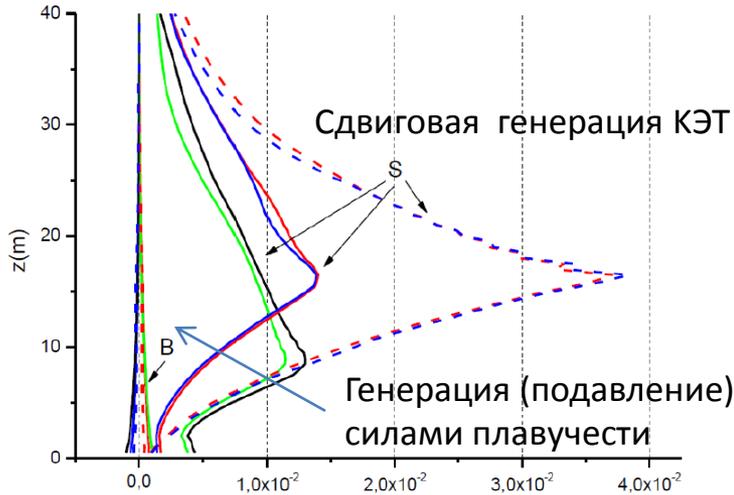
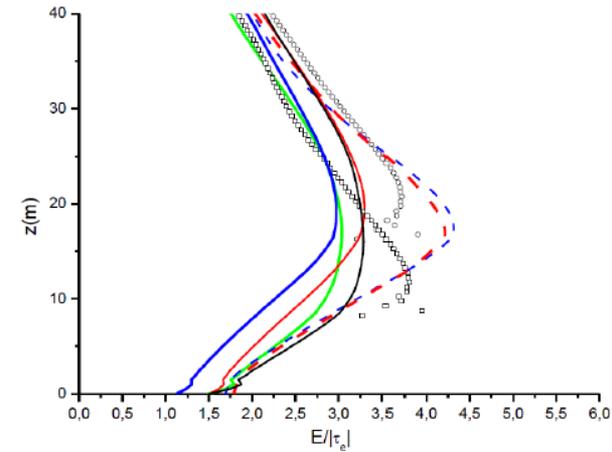
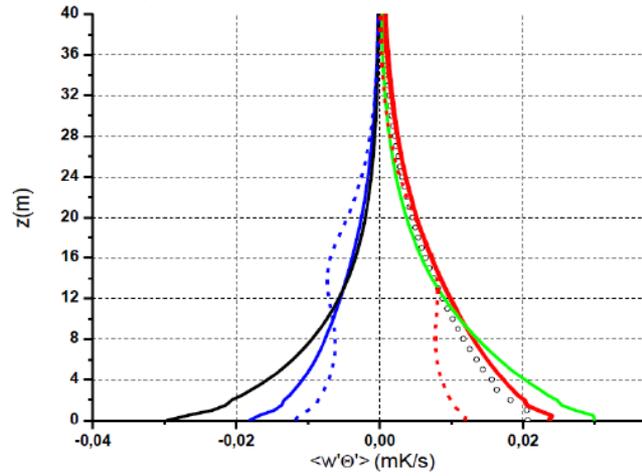
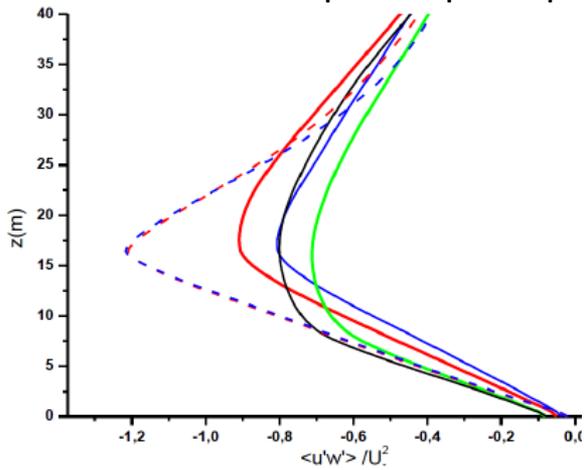
Турбулентный поток генерируется вспомогательной моделью (а) с двоякопериодическими граничными условиями и с заданным массивом объектов на поверхности. Значения  $z_{0w}$  и  $D$  соответствуют типичным значениям для лесной растительности

Непериодическая расчетная область (б), включающая “озеро”.  
 $z_{0l} = 10^{-4} \text{ m}$   
 $T_s^{lake} = T_{air} \pm 5^{\circ}\text{C}$

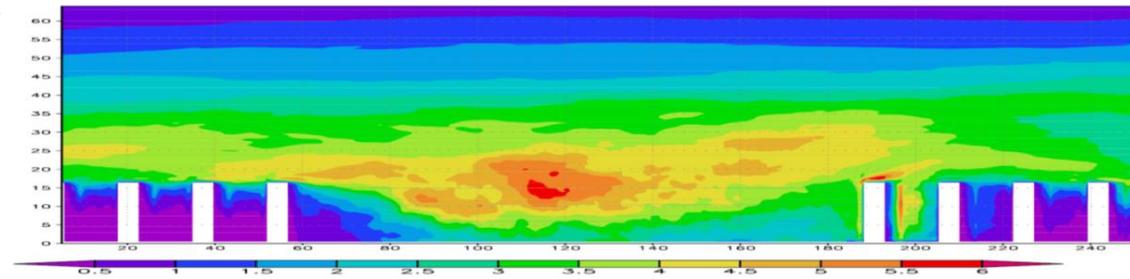
Шаг сетки  $\Delta = 0.5 \text{ м}$ ,  $1024 \times 512 \times 128$  узлов, время интегрирования  $T = 1 \text{ час}$   $\Delta_t = 0.025 \text{ секунд}$



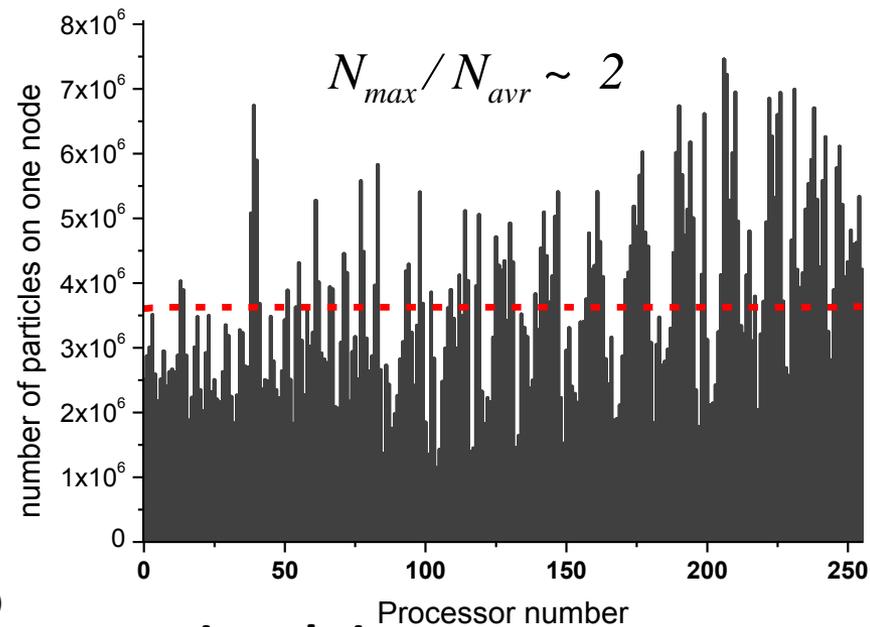
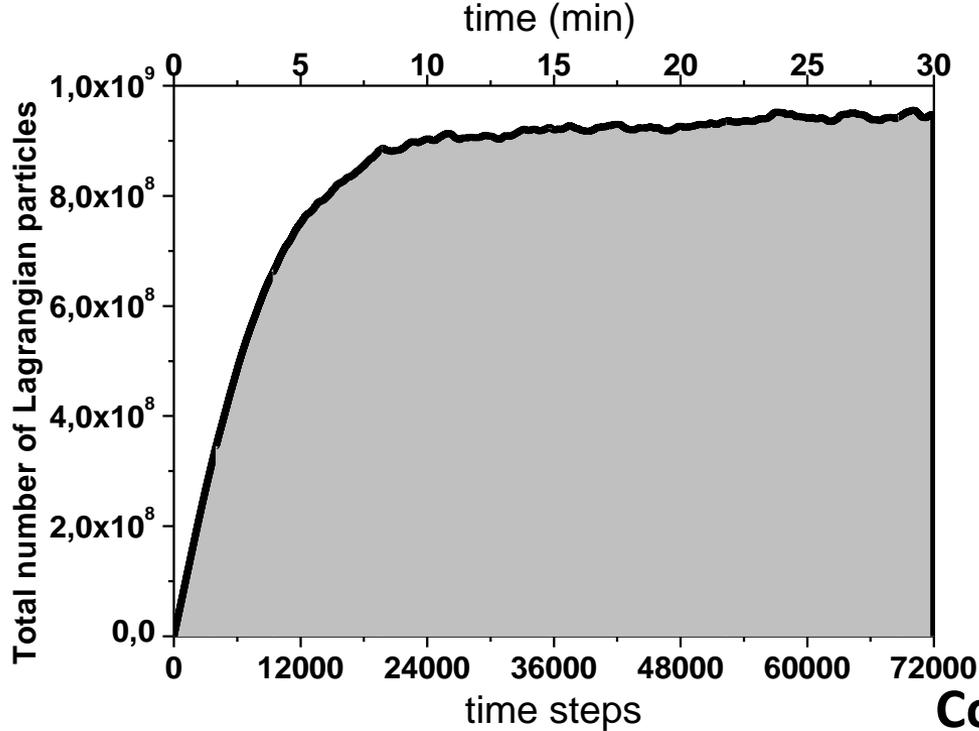
# Некоторые характеристики турбулентности, осредненные по всей площади "озера"



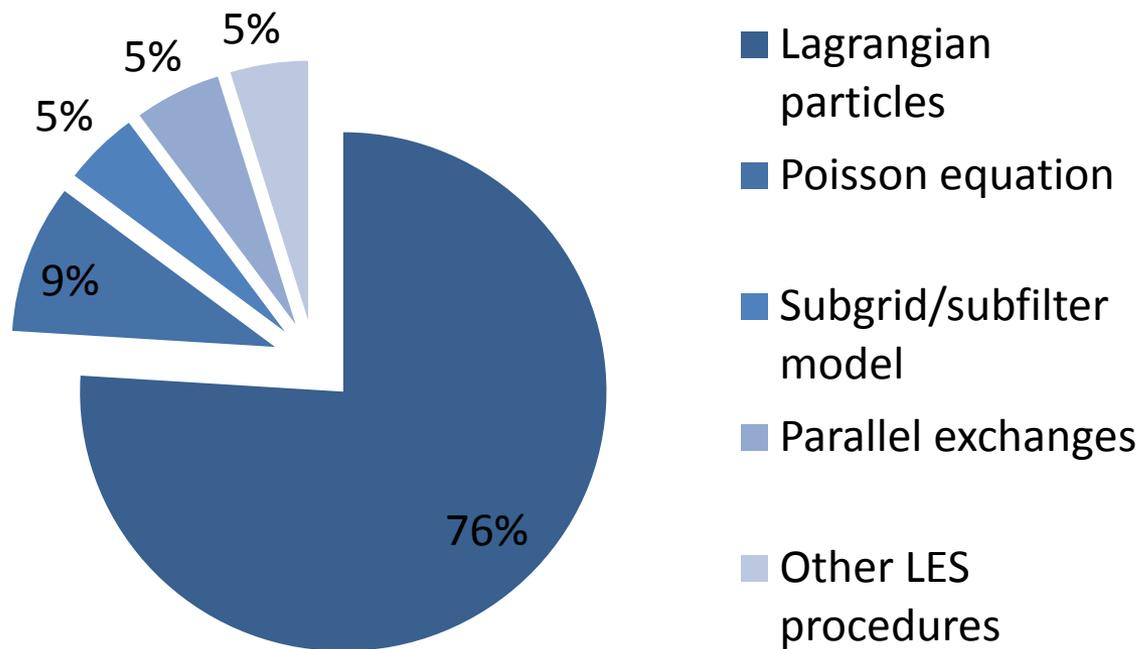
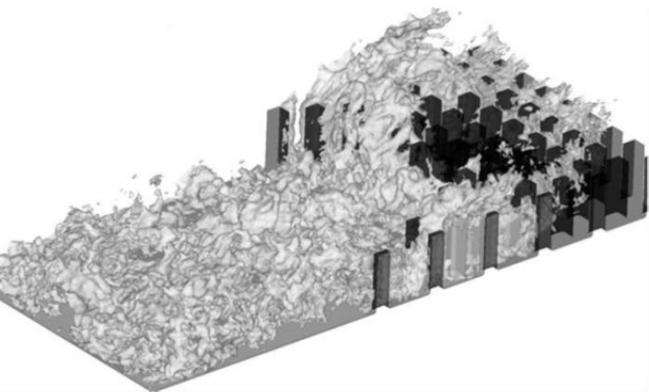
## Кинетическая энергия турбулентности (КЭТ)



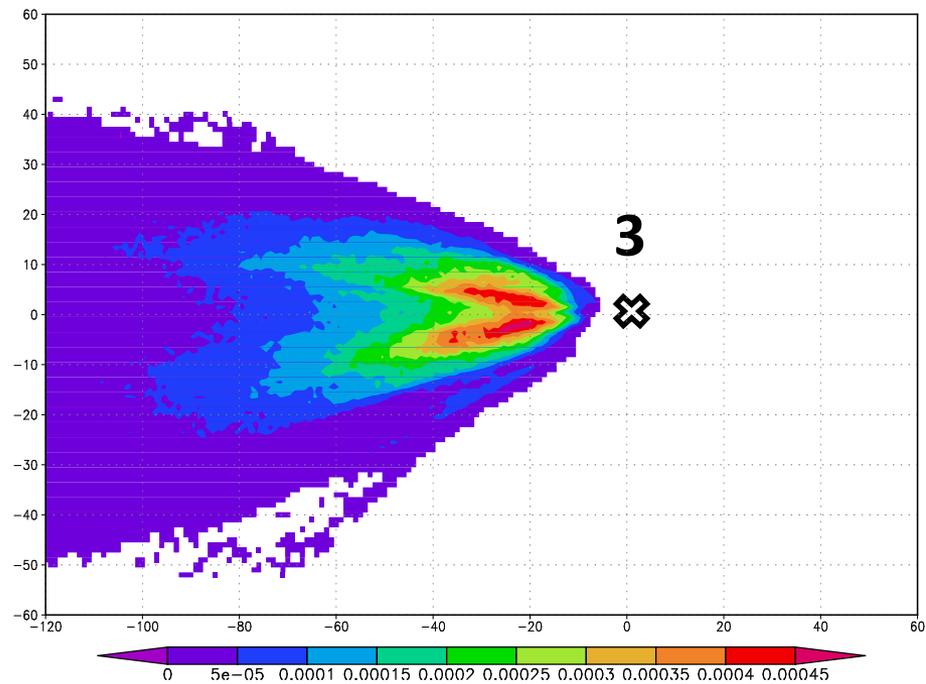
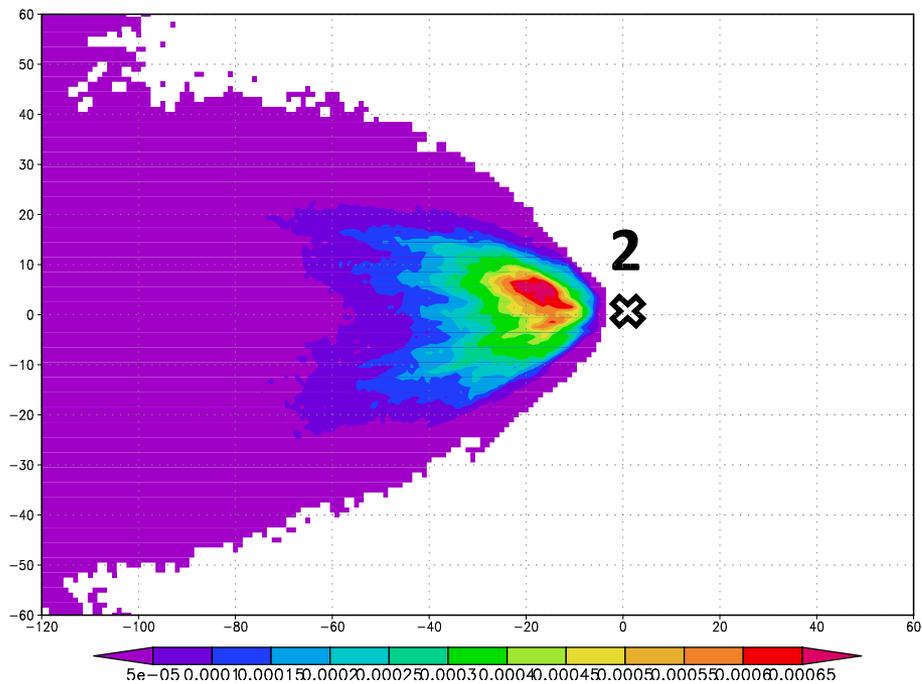
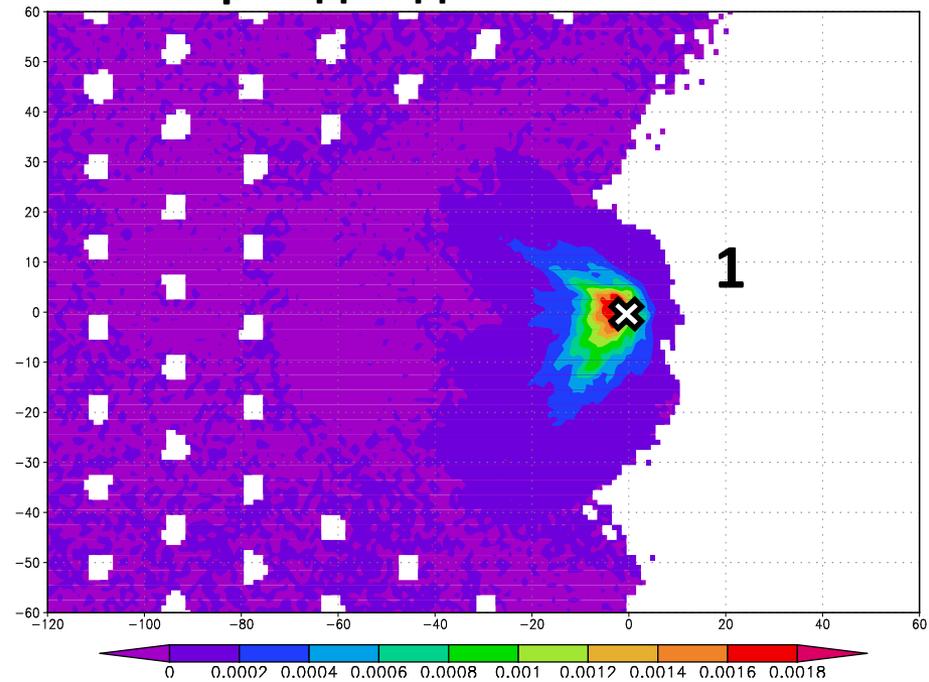
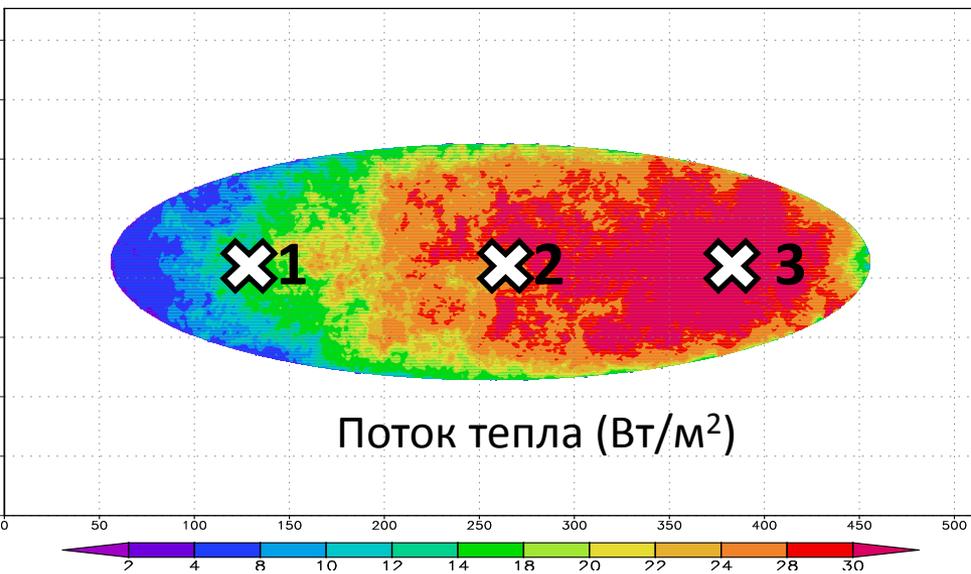
- Слой постоянных потоков отсутствует (Существенная часть тепла и влаги переносится над озером в горизонтальном направлении)
- Очень слабая чувствительность к стратификации (ТПМО неприменима для вычисления турбулентных потоков над «озером»)



### Computational time



# Футпринты потока скаляра с поверхности «озера» для датчика на высоте 3 м



Численное моделирование турбулентности в пограничном слое атмосферы является одним из наиболее востребованных приложений LES-метода в задачах гидротермодинамики.

LES-модели, ориентированные на решение геофизических задач, имеют свою специфику. В первую очередь от таких моделей требуется достоверность воспроизведения статистических характеристик развитой стратифицированной турбулентности при очень больших числах Рейнольдса и способность описывать динамику турбулентных и квазиупорядоченных вихрей в широком диапазоне временных и пространственных масштабов.

Преимуществом LES-методологии является возможность получения требуемых статистик решения при грубом пространственном разрешении и с меньшими вычислительными затратами, чем это потребовалось бы при DNS-моделировании.

Результаты LES-моделирования восполняют недостаток данных наблюдений в ПСА и играют важную роль в развитии методов математического моделирования природно-климатических процессов.

Модели региональной циркуляции атмосферы по пространственному разрешению становятся все ближе к LES-моделям, поэтому подходы, развитые при построении последних, вскоре начнут напрямую применяться в задачах прогноза погоды.

Спасибо за внимание!