Новосибирск
Институт вычислительной математики и математической геофизики

Осреднение стохастических радиационных моделей на основе вероятностного и численно-статистического анализа.

Михайлов Г.А., Амбос А.Ю.

Содержание

Введение

Цели работы:

- Исследование переноса частиц (квантов излучения) с рассеянием через стохастические среды.
- Изучение возможности эффективного (относительно величины P_t) осреднения стохастической радиационной модели
- Оценка показаний протяжённого детектора с учётом свойств эргодичности и их дисперсии
- Построение асимптотической экспоненциальной оценки функции $P_t(H)$, где H - толщина слоя среды.
- Сравнение двух типов однородных и изотропных случайных полей с одинаковой корреляционной длиной.
- Изучение погрешности перевыбора

Содержание

Мозаичные случайные поля

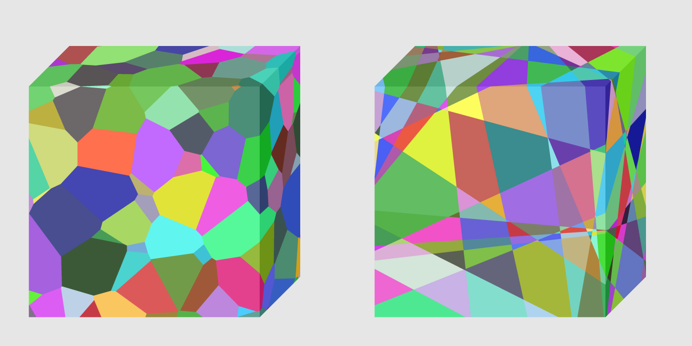

Рис. 1. Однородные изотропные мозаичные случайные поля

Мозаичные случайные поля строятся на основе некоторого разбиения пространства на ячейки со случайным выбором значения поля в каждой ячейке, согласно некоторому распределению (независимо от остальных ячеек).

Мозаичное случайное поле Вороного

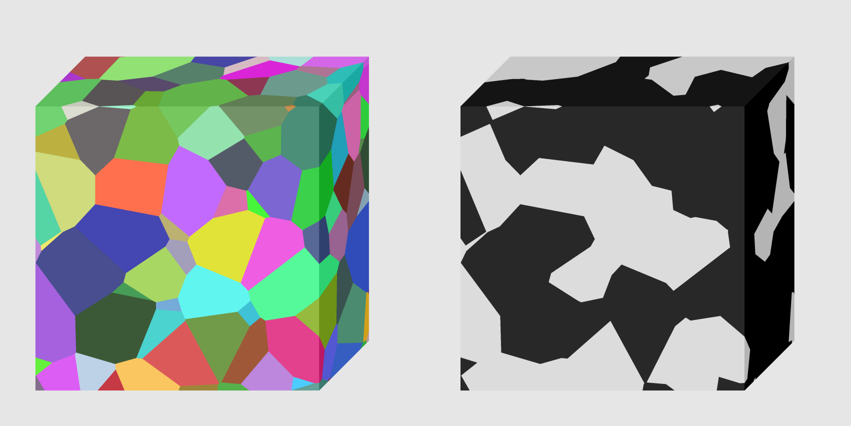

Рис. 2. Поле Вороного (диаграмма Вороного)

Мозаичное случайное поле Вороного

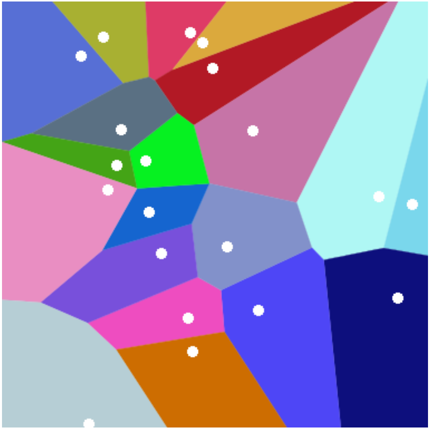

Рис. 3. Поле Вороного для двумерного случая

источник картинки: wikipedia

Мозаичное случайное поле Вороного

Формулы моделирования поля Вороного в параллелепипеде толщины $-H_1 \leq x \leq H_1$ и ширины $-H_2 \leq y, z \leq H_2$:

1) моделируется пуассоновское число k случайных точек согласно параметру $\lambda_v V$, где V - объём параллелепипеда.
2) равномерно по объёму моделируется k точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ по формулам:
$x_1 = (1 - 2\alpha_1)H_1$, $x_2 = (1 - 2\alpha_2)H_2$, $x_3 = (1 - 2\alpha_3)H_2$,

Значения поля σ в точке $\mathbf{r}$ определяется значением $\arg \min\limits_{i=1...k} \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{r}\|$.

Мозаичное случайное поле Пуассона

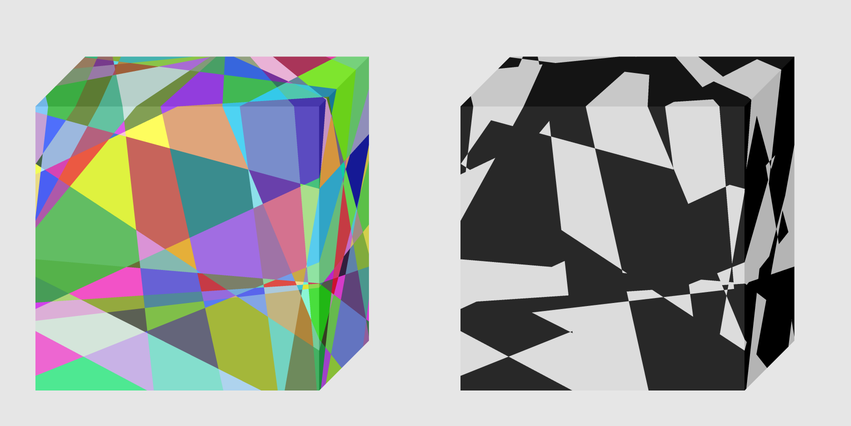

Рис. 4. Мозаичное случайное поле Пуассона

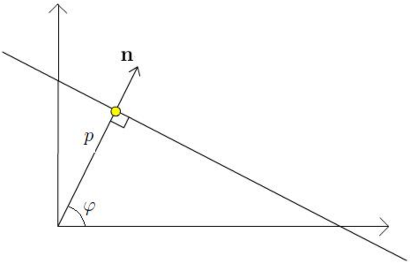

Рис. 5. Базовая плоскость (двумерный случай)

Каждая плоскость полностью определяется единичным вектором "внешней" нормали $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ и расстоянием p до начала координат O, то есть точкой $(p, \mathbf{n})$ параметрического пространства $T = R^+ \times S^{(3)}$, где $S^{(3)}$ - единичная сфера в R^3 с центром в начале координат.

Мозаичное случайное поле Пуассона

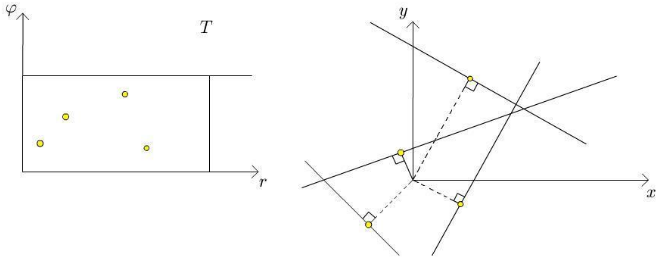

Рис. 6. Параметрическое пространство и соответствующие базовые плоскости

Рассмотрим пуассоновское точечное поле в пространстве T с параметром λ_p. Отождествив каждую точку этого поля с плоскостью, как указано выше, получаем требуемое поле Γ случайных плоскостей.

Мозаичное случайное поле Пуассона

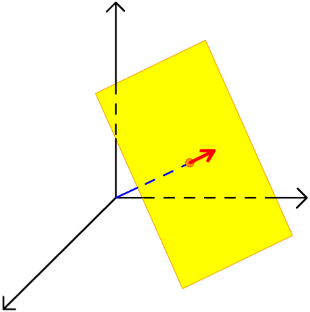

Рис. 7. Базовая плоскость для трёхмерного случая

Мозаичное случайное поле Пуассона

Формулы моделирования поля Пуассона в шаре B радиуса d:
1) моделируется пуассоновское число k случайных плоскостей согласно параметру $\Lambda = 4\pi d \lambda_p$, где λ_p - параметр пуассоновского потока, а Λ - мера шара B в параметрическом пространстве.
2) моделируется k векторов вида (p, n_1, n_2, n_3) по формулам:
$p = \alpha_3 d$, $n_1 = 1 - 2\alpha_1$, $n_2 = \sqrt{1 - n_1^2} cos(2\pi\alpha_2)$,
$n_3 = \sqrt{1 - n_1^2} sin(2\pi\alpha_2)$.
Значения поля σ в точке $\mathbf{r}$ определяется последовательностью $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, где γ_i знак выражения, полученного при подстановке $\mathbf{r}$ в уравнение i-ой плоскости.

Мозаичное случайное поле Пуассона

Нахождение значения поля σ для точки $\mathbf{r}$ можно осуществить при помощи построения графа-дерева следующим алгоритмом:

Движение начинается из корня дерева - указателю присваивается соответствующее значение

Для каждого i из $\{1, \dots, k\}$:
  Происходит выбор ветки в зависимости от знака γ_i.
  Если ветка ещё не построена (т.е. указатель на неё пустой), то создаётся новый узел и выбирается значение поля σ.
  Указателю присваивается соответствующее значение

На шаге k указатель указывает на узел хранящий нужное значение σ

Мозаичное случайное поле Пуассона

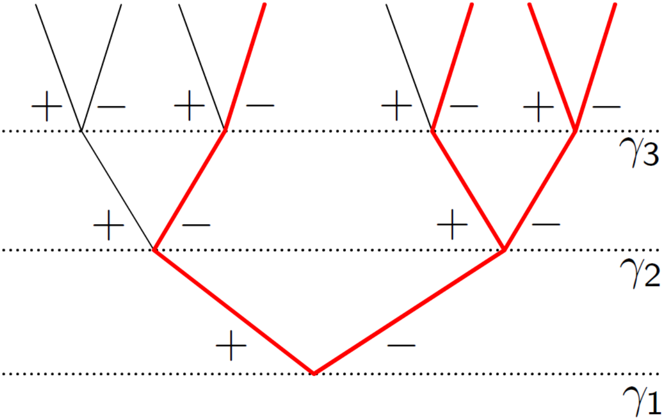

Рис. 8. Граф, определяющий значения поля σ.

Мозаичное случайное поле Пуассона

Теорема

Построенное поле $\sigma(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in R^3$, является однородным и изотропным в узком смысле с (нормированной) корреляционной функцией

$$\mathrm{K}(r) = e^{-\pi \lambda_p r}, \quad r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|.$$

Корреляционная длина ρ

Корреляционная функция для поля Вороного:

$$K(r) = \lambda_v \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda V(R,u) r^3} 6\pi sin(u) R^2 dR du, \qquad (1)$$

где $V(R,u)$ - объём объединения двух шаров с центрами на расстоянии 1 с радиусами R и $\sqrt{R^2 + 1 - 2Rcos(u)}$.

Корреляционная длина ρ

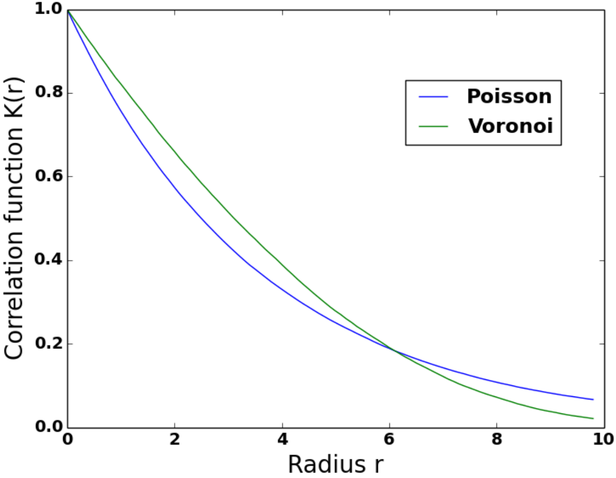

Рис. 9. Корреляционные функции полей Вороного и Пуассона.

Корреляционная длина ρ

Особую роль в прикладных исследованиях играет величина $\rho = \int\limits_0^\infty \mathrm{K}(r)dr$, где $\mathrm{K}(r)$ - нормированная корреляционная функция. Эту величину иногда называют “корреляционной длиной” или “радиусом корреляции”.

Для поля Вороного: $\rho_v \approx 0.459\lambda_v^{-1/3}$
Для поля Пуассона: $\rho_p = \pi\lambda_p$

Содержание

Эффективное осреднение радиационной модели относительно величины P_t

Рассматривается односкоростной процесс переноса частиц через плоский слой вещества $0 < x < H$ с коэффициентом ослабления $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, причём $\sigma(\mathbf{r})$ - однородное изотропное случайное поле. Выполняется равенство $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_c(\mathbf{r})$, где $\sigma_s(\mathbf{r})$ - коэффициент рассеяния с заданной индикатрисой рассеяния $g(\mu)$, причём вероятность “выживания” кванта $\sigma_s(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r}) \equiv q < 1$. Предполагается, что средний косинус рассеяния $\mu_0 = \int_0^1 \mu g(\mu) d\mu$ близок к единице, то есть рассеяние существенно анизотропно.

Эффективное осреднение радиационной модели относительно величины P_t

В качестве тестовой рассмотрена задача с параметрами $\mu_0 = 0.9$ и $q = 0.9$, которые соответствуют переносу видимого солнечного излучения через облачную атмосферу. Рассеяние определяется стандартной индикатрисой Хеньи-Гринстейна с параметром μ_0:

$$g(\mu) = \frac{1}{2}\frac{1-\mu_0^2}{(1+\mu_0^2-2\mu_0\mu)^{3/2}}. \tag{2}$$

Эффективное осреднение радиационной модели относительно величины P_t

Полагая, что поле σ является мозаичным с заданным одномерным распределением, перейдём далее к оценке коэффициентов рассеяния $\widetilde{\sigma}_s$ и поглощения $\widetilde{\sigma}_c$ в требуемой осреднённой радиационной модели.

Оценка коэффициента рассеяния $\widetilde{\sigma}_s$

Вначале рассмотрим простейший вариант распределения σ:

$$P(\sigma = 0) = p_0, P(\sigma = \sigma_s) = 1 - p_0, \quad 1/\sigma_s < d^{-1},$$

где d^{-1} - среднее расстояние между последовательными пересечениями границ ячеек пробегом частицы, а $1/\sigma_s$ равна среднему расстоянию между последовательными рассеяниями в "непустой" ячейке при $d^{-1} = +\infty$. Отсюда на основе повторного осреднения по ансамблю остатков свободных пробегов после их пересечений с границами ячеек получаем:

$$\widetilde{\sigma}_s = ((1 - p_0)\sigma_s^{-1} + p_0(d^{-1} + \widetilde{\sigma}_s^{-1}))^{-1} = \frac{1 - p_0}{(1 - p_0)\sigma_s^{-1} + p_0 d^{-1}}. \tag{3}$$

Такое осреднение целесообразно вследствие пуассоновости потока столкновений.

Оценка коэффициента рассеяния $\widetilde{\sigma}_s$

Отметим, что для пуассоновского мозаичного поля $d^{-1} = \rho$. Приближение $d^{-1} = \rho$ можно использовать для поля Вороного, а также для произвольного изотропного поля σ на основе его кусочно-постоянной аппроксимации. Заметим, что если $\sigma_s^{-1} > d^{-1}$, то целесообразно полагать $\widetilde{\sigma}_s = \overline{\sigma}_s = (1 - p_0)\sigma_s$. Далее, если в непустой ячейке имеет место нормированное распределение $F(dx), \sigma_s^{(1)} \leq x \leq \sigma_s^{(2)}$, значения σ при $\sigma_s^{(1)} < d^{-1}$, то по аналогии получаем

$$\widetilde{\sigma}_s = \frac{1 - p_0}{(1 - p_0) \int_{\sigma_s^{(1)}}^{\sigma_s^{(2)}} \frac{F(dx)}{x} + p_0 d^{-1}}. \tag{4}$$

Оценка коэффициента рассеяния $\widetilde{\sigma}_s$

Если $p_0 = 0$ и мера $F(dx)$ такова, что $P(\sigma_s = \sigma_s^{(1)}) = p$, $P(\sigma_s = \sigma_s^{(2)}) = 1 - p$ при $\sigma_s^{(1)}, \sigma_s^{(2)} < d$, то формула приобретает вид

$$\widetilde{\sigma}_s = \frac{1}{p/\sigma_s^{(1)} + (1-p)/\sigma_s^{(2)}}. \qquad (5)$$

Оценка коэффициента поглощения $\widetilde{\sigma}_c$

Рассмотрим теперь вопрос об осреднении коэффициента поглощения, т.е. об оценке величины $\widetilde{\sigma_c}$, которая совместно с $\widetilde{\sigma}_s$ воспроизводит достаточно точное значение P_t асимптотически, при толщине слоя среды $H \to \infty$.

Оценка коэффициента поглощения $\widetilde{\sigma}_c$

В случае детерминированной, т.е. эффективно осреднённой рассеивательной модели, для осреднённой вероятности пропускания выполняется соотношение:
$P_t = \int \mathrm{E}_\sigma e^{-\tau_c(\mathbf{L})} P_s(d\mathbf{L})$, где $P_s(d\mathbf{L})$ - соответствующее рассеивательной модели распределение траекторий, а $\tau_c(\mathbf{L}) = \tau_c(+\infty, \mathbf{L})$ - полная длина поглощения прошедшей траектории $\mathbf{L}$. Для рассмотренных выше моделей поля $\sigma(\mathbf{r})$ имеем $\mathrm{E}_\sigma e^{-\tau_c(\mathbf{L})} = \mathrm{E}_\sigma exp(-\sum\limits_i \sigma_{(i)}^{(c)} l_i)$,где $\{l_i\}$ - длины пробега на $\mathbf{L}$ в подобластях базового мозаичного разбиения пространства, $\{\sigma_{(i)}^{(c)}\}$ - соответствующие случайные значения σ_c. Вследствие условной независимости этих значений имеем:

$$\mathrm{E}_\sigma e^{-\tau_c(\mathbf{L})} = \prod_i \mathrm{E} exp(-\sigma_{(i)}^{(c)} l_i) \qquad (6)$$

Оценка коэффициента поглощения $\widetilde{\sigma}_c$

В предположении, что последовательность $\{t_i\}$ расстояний от начала траектории до пересечений с границами случайного пуассоновского разбиения является пуассоновским точечным потоком с интенсивностью d, представление $\mathrm{E}J(t;\mathbf{L}) = \mathrm{E}\mathrm{E}(J(t;\mathbf{L})|t_1)$ даёт для этой функции интегральное уравнение типа "уравнения восстановления", для которого известно асимптотическое (при $H \to +\infty$) решение: $\mathrm{E}J(t;\mathbf{L}) \asymp Ce^{-\alpha t}$, где $C = (d^2\mathrm{E}[d - \widetilde{\sigma}_c + \sigma_c(\mathbf{r}(t_1))]^{-2})^{-1} < 1$, а значение $\widetilde{\sigma}_c$ определяется уравнением

$$\mathrm{F}(\alpha) = \mathrm{E}[d - \widetilde{\sigma}_c + \sigma_c(\mathbf{r}(t_1))]^{-1} = d^{-1}, \tag{7}$$

решение которого существует и единственно в интервале $(0, d + min\ \sigma(\mathbf{r}))$.

Оценка коэффициента поглощения $\widetilde{\sigma}_c$

Отметим, что использование этого уравнения затруднено необходимостью предварительного определения одномерного распределения случайного поля $\sigma(\mathbf{r})$. Поэтому может быть целесообразным распространить полученную более универсальную оценку из приближения на основе ЦПТ:

$$\mathrm{E}J(t;\mathbf{L}) \asymp exp\{-t\mathrm{E}\sigma_c(1-\frac{\rho\mathrm{D}\sigma_c}{\mathrm{E}\sigma_c})\} * \int\limits_A^\infty f(u)du, \qquad t\to\infty, \quad (8)$$

где $f(u)$ - плотность стандартного нормального распределения, $A=\frac{2\rho\mathrm{D}\sigma_c-\mathrm{E}\sigma_c}{\sqrt{2\rho\mathrm{D}\sigma_c}}\sqrt{t}=C_A\sqrt{t}$. Отсюда в случае $2\rho\mathrm{D}\sigma_c-\mathrm{E}\sigma_c<0$ получается оценка $\widetilde{\sigma}_c\approx\mathrm{E}\sigma_c-\rho\mathrm{D}\sigma_c$, а в случае $2\rho\mathrm{D}\sigma_c-\mathrm{E}\sigma_c>0$ оценка $\widetilde{\sigma}_c\approx\frac{(\mathrm{E}\sigma_c)^2}{4\rho\mathrm{D}\sigma_c}$, с домножением оценки P_t на $(\sqrt{2\pi\widetilde{L}}C_A)^{-1}$, где $\widetilde{L}$ - эффективно осреднённая длина прошедшей траектории.

Содержание

Корреляционная функция и асимптотические оценки поля проходящей радиации.

Решается задача оценки показания достаточно протяжённого “нормированного” детектора частиц на верхней границе слоя в случае мононаправленного источника, распределённого равномерно на нижней границе (“один квант с единицы площади”). Из нижеследующего видно, что при выполнении определённых свойств эргодичности такое показание, как функция случайного поля σ, близко к P_t с дисперсией, убывающей при увеличении площади детектора соответственно убыванию корреляционной функции поля интенсивности проходящей радиации. Таким образом возникает задача оценки этой корреляционной функции.

Корреляционная функция и асимптотические оценки поля проходящей радиации.

Пусть показание детектора определяется величиной $\mathrm{I}_T = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T I(y,z)dydz$, где $I(y,z)$ - значение поля проходящей радиации в точке (H,y,z). Отметим, что для "горизонтально" однородных источника и стохастической среды имеем $\mathrm{E}I_T = P_t$. Выполняется асимптотическое равенство:

$$\mathrm{DI}_T \asymp_{T\to\infty} 2\pi T^{-2}\mathrm{D}I_0 \int_0^\infty rK_I(r)dr. \qquad (9)$$

Для $K_I(r) = e^{-\lambda r}$ отсюда

$$\mathrm{DI}_T \asymp_{T\to\infty} 2\pi T^{-2}\lambda^{-2}\mathrm{D}I_0. \qquad (10)$$

Последнее уравнение позволяет получить оценку λ.

Корреляционная функция и асимптотические оценки поля проходящей радиации.

По аналогии с детерминированным вариантом задачи можно предположить, что выполняется асимптотическое соотношение

$$P_t = P_t(H) \asymp Ce^{-\beta H}, \quad H \to \infty. \tag{11}$$

Построив оценки $\widetilde{P}_t(H)$ и $\widetilde{P}_t(H + \Delta H)$ на одном ансамбле траекторий частиц, можно оценить параметры β, C:

$$\beta \approx \widetilde{\beta} = (\Delta H)^{-1} ln(\widetilde{P}_t(H)/\widetilde{P}_t(H + \Delta H)), \qquad C \approx \widetilde{C} = \widetilde{P}_t e^{\widetilde{\beta} H}. \tag{12}$$

Корреляционная функция и асимптотические оценки поля проходящей радиации.

Дисперсии $\mathrm{D}\widetilde{\beta}, \mathrm{D}\widetilde{C}$ можно оценить, повторив M раз выборку ансамбля. Если прямое осреднение M полученных оценок близко к оценке по объединённому ансамблю, то естественно предполагать, что дисперсия такой, наиболее точной, оценки в M раз меньше элементарной. В какой-то степени проверить это предположение можно, оценив величину $\mathrm{D}\widetilde{\beta}$ на основе соотношения: $P_t(H+\Delta H)/P_t(H) \approx e^{-\beta\Delta H} \approx 1-\beta\Delta H$, то есть используя формулу:

$$\widetilde{\beta} \approx \frac{1}{\Delta H}\frac{\widetilde{P}_t(H)-\widetilde{P}_t(H+\Delta H)}{\widetilde{P}_t(H)}. \tag{13}$$

Учитывая положительную корреляцию числителя и знаменателя, естественно предположить, что

$$\mathrm{D}\widetilde{\beta} \leq \frac{1}{(\Delta H)^2}\frac{\mathrm{D}[\widetilde{P}_t(H)-\widetilde{P}_t(H+\Delta H)]}{\widetilde{P}_t^2(H)}. \tag{14}$$

Корреляционная функция и асимптотические оценки поля проходящей радиации.

Величина $\mathrm{D}[\widetilde{P}_t(H) - \widetilde{P}_t(H + \Delta H)]$ эффективно оценивается и может быть достаточно малой, в связи с тем, что оценки $\widetilde{P}_t(H)$ и $\widetilde{P}_t(H + \Delta H)$ вычисляются на одном ансамбле траекторий.

В качестве альтернативной можно рассмотреть оценку величин β, C путём вычисления соответствующих значений для детерминированной модели с параметрами $\widetilde{\sigma}_c, \widetilde{\sigma}_s$.

Содержание

Моделирование проводилось для ограниченного слоя вещества:

$$0 \leq x \leq H; \quad -100 \leq y, z \leq 100,$$

с коэффициентом ослабления $\sigma(\mathbf{r}), \mathbf{r} = (x, y, z)$, образующим кусочно-постоянное случайное поле на основе поля Вороного или поля Пуассона.

Параметры: $H = 40$; $q = 0.9$; $\mu_0 = 0.9$; $\rho = 3.6$.

В расчётах было реализовано два варианта одномерного распределения σ:

$$\mathcal{F}_1 : \sigma_1 = 0.6, \quad \sigma_2 = 1.4, \quad p = \mathrm{P}(\sigma = \sigma_1) = 0.5,$$

$$\mathcal{F}_2 : \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1.16, \quad p = \mathrm{P}(\sigma = \sigma_1) = 16/116 \approx 0.1379.$$

Отметим, что $\mathcal{F}_2$ - простая модель "разорванной облачности".

Для обоих вариантов

$$\sigma_s = 0.9\sigma, \quad \sigma_c = 0.1\sigma, \quad \mathrm{E}\sigma_c = 0.1, \quad \mathrm{D}\sigma_c = 0.0016.$$

В расчётах методом Монте-Карло необходимо строить траектории квантов в геометрически сложных реализациях случайной среды. Длина свободного пробега распределена с плотностью:

$$f(t;\mathbf{r}',\omega) = \sigma(\mathbf{r}' + t\omega)exp(-\tau(t;\mathbf{r}',\omega)), \qquad (15)$$

Достаточно эффективным оказывается "метод максимального сечения", который реализуется в предположении $\sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_m$. Для модифицированной среды длина пробега реализуется по формуле $t = -ln\alpha/\sigma_m$. Алгоритм реализуется следующим образом:

1) $\xi := 0; \alpha := rand; P = 1 - \frac{\sigma(\mathbf{r}(\xi))}{\sigma_m}$

2) while $(\alpha \leq P)$ do $\{ \xi := \xi - \frac{ln(rand)}{\sigma_m}; P := P(1 - \frac{\sigma(\mathbf{r}(\xi))}{\sigma_m})\}$

3) $\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{r}' + \omega\xi$

Моделирование процесса переноса излучения

Вместо моделирования поглощения можно домножать вспомогательный вес на $q(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$. Поглощение можно также учитывать экспоненциальным весовым множителем. В соответствующем алгоритме траектория $\mathbf{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r_L}(t), t > 0$, строится для $\sigma_c \equiv 0$ (то есть при $\sigma \equiv \sigma_s$) и вычисляется вспомогательный вес

$$J(t; \mathbf{L}) = e^{-\tau_c(t;\mathbf{L})}, \qquad \tau_c(t; \mathbf{L}) = \int\limits_0^t \sigma_c(\mathbf{r}_{\mathbf{L}(s)})ds. \tag{16}$$

Для вычисления функционалов использовался "метод двойной рандомизации". В расчётах также использовался "распределительный способ" использования псевдослучайных чисел.

Содержание

Вычислительные эксперименты

Была оценена трудоёмкость для 10000 реализаций (1 поле и 1 траектория), H = 20.

Для $\rho = 2$
$t(F_{poiss}) \approx 11.2$ сек
$t(F_{voron}) \approx 506.4$ сек

Для $\rho = 3.6$
$t(F_{poiss}) \approx 5.1$ сек
$t(F_{voron}) \approx 80.7$ сек

Для $\rho = 5$
$t(F_{poiss}) \approx 3.5$ сек
$t(F_{voron}) \approx 28.2$ сек

Вычислительные эксперименты

Таблица 1. Параметры осреднённых моделей

	$\overline{\sigma}_s$	$\widetilde{\sigma}_s$	$\overline{\sigma}_c$	$\widetilde{\sigma}_c$
$\mathcal{F}_1$	0.9	0.756	0.1	0.09435
$\mathcal{F}_2$	0.9	0.65195	0.1	0.09206

где $\overline{\sigma}_s = p\sigma_s^{(1)} + (1-p)\sigma_s^{(2)}$, $\overline{\sigma}_c = p\sigma_c^{(1)} + (1-p)\sigma_c^{(2)}$.

Таблица 2. Оценки средней вероятности прохождения P_t с использованием осреднённых моделей и соответствующие "точные" оценки, H $= 40$, $N = 10^6$

	$P_t^{(v)}$	$P_t^{(p)}$	$P_t(\overline{\sigma}_s, \overline{\sigma}_c)$	$P_t(\widetilde{\sigma}_s, \widetilde{\sigma}_c)$
$\mathcal{F}_1$	0.000819	0.000811	0.000387	0.000836
$\mathcal{F}_2$	0.00133	0.00156	0.000387	0.00135

Таблица 3. Оценки средней вероятности альбедо P_a с использованием осреднённых моделей и соответствующие "точные" значения, H $= 40$, $N = 10^6$

	$P_a^{(v)}$	$P_a^{(p)}$	$P_a(\overline{\sigma}_s, \overline{\sigma}_c)$	$P_a(\widetilde{\sigma}_s, \widetilde{\sigma}_c)$
$\mathcal{F}_1$	0.0670	0.0672	0.0684	0.0607
$\mathcal{F}_2$	0.0657	0.0663	0.0684	0.0533

Таблица 4 Оценки DI в зависимости от T и H и соответствующая оценка $\widetilde{\lambda}$, H $=40$, $N=10^6$, $N_\sigma=100$.

	DI_0	DI_{70}	DI_{80}	$\widetilde{\lambda}_{70}$	$\widetilde{\lambda}_{80}$
$H=1$	0.00873	0.000167	0.000118	0.258	0.269
$H=10$	0.00765	0.000250	0.000203	0.198	0.192
$H=20$	0.000322	0.0000240	0.0000194	0.131	0.127

Таблица 5 Оценки C и β, оценки среднеквадратических погрешностей, H $= 40$, $\Delta H = 0.1$, $M = 100$, $N_M = 10^5$, $N = 10^7$

	$\widetilde{\widetilde{C}}$	$\widetilde{\widetilde{\beta}}$	$\widetilde{C}$	$\widetilde{\beta}$	$\sqrt{\mathrm{D}\widetilde{\widetilde{C}}/M}$	$\sqrt{\mathrm{D}\widetilde{\widetilde{\beta}}/M}$	оц. св. $\sqrt{\mathrm{D}\widetilde{\beta}/N}$
$\mathcal{F}_1$	1.52	0.188	1.48	0.188	0.0384	0.000627	0.000690
$\mathcal{F}_2$	1.29	0.166	1.20	0.166	0.0552	0.000920	0.00103

Оценки $\widetilde{\widetilde{C}}$, $\widetilde{\widetilde{\beta}}$ получены осреднением соответствующих оценок для M серий по N_M реализаций, а $\widetilde{C}$, $\widetilde{\beta}$ получены по всем $N = M \cdot N_M$ реализациям поля σ. Величины C и β были вычислены также для соответствующими осреднённых моделей. Они равны соответственно 1.53, 0.187 для $\mathcal{F}_1$ и 1.53, 0.176 для $\mathcal{F}_2$.

Таблица 6 Оценки P_t и P_a, без перевыбора, Н $=40$, $N=10^6$

	$P_t^{(v)}$	$P_t^{(p)}$	$P_a^{(v)}$	$P_a^{(p)}$
$\mathcal{F}_1$	0.000819	0.000811	0.0670	0.0672
$\mathcal{F}_2$	0.00133	0.00156	0.0657	0.0663

Таблица 7 Оценки P_t и P_a, перевыбор, экспоненциальный вес, Н $=40$, $N=10^6$

	$P_t^{(v)}$	$P_t^{(p)}$	$P_a^{(v)}$	$P_a^{(p)}$
$\mathcal{F}_1$	0.000642	0.000653	0.0648	0.0648
$\mathcal{F}_2$	0.000637	0.000711	0.0608	0.0613

Таблица 8 Оценки P_t и P_a, перевыбор, вес $q(\mathbf{r})$, Н $=40$, $N=10^6$

	$P_t^{(v)}$	$P_t^{(p)}$	$P_a^{(v)}$	$P_a^{(p)}$
$\mathcal{F}_1$	0.000820	0.000798	0.0665	0.0668
$\mathcal{F}_2$	0.000129	0.00152	0.0652	0.0657

Библиография

- Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Statistical simulation of an exponentially correlated many-dimensional random field // Rus. J. Num. Anal. Math. Model.-2011.-Vol. 26, № 3.-P. 263–273.
- Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. New algorithms of numerical–statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Rus. J. Num. Anal. Math. Model.-2014.-Vol. 29, № 6.-P. 331-339.
- Амбос А.Ю., Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и соответствующие задачи переноса излучения. // Сиб. журн. вычисл. матем. -2015. -Т. 18, № 4.