Национальный исследовательский
Томский государственный университет

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ В РУСЛЕ РЕКИ

**Старченко А. В., Чуруксаева В. В.**

# Актуальность работы



**Знание структуры течения реки необходимо для:**

- построения качественного прогноза появления и размеров локальных зон весеннего затопления при загромождении льдинами речного русла;

- оценки возможной вариации рельефа дна, что важно для речного судоходства и определения зон безопасного отдыха;

- предсказания характера распространения примеси, попадающей в речной поток.

**Использование методов математического моделирования позволяет избежать экономических и технологических трудностей, с которыми сопряжено экспериментальное исследование водоемов.**


Дноуглубительные работы

Наводнение во время ледохода

Сброс сточных вод

# Цель работы:



численное исследование турбулентного течения и распространения примеси в речном потоке.

**Для достижения цели в рамках представляемой работы решены следующие задачи:**

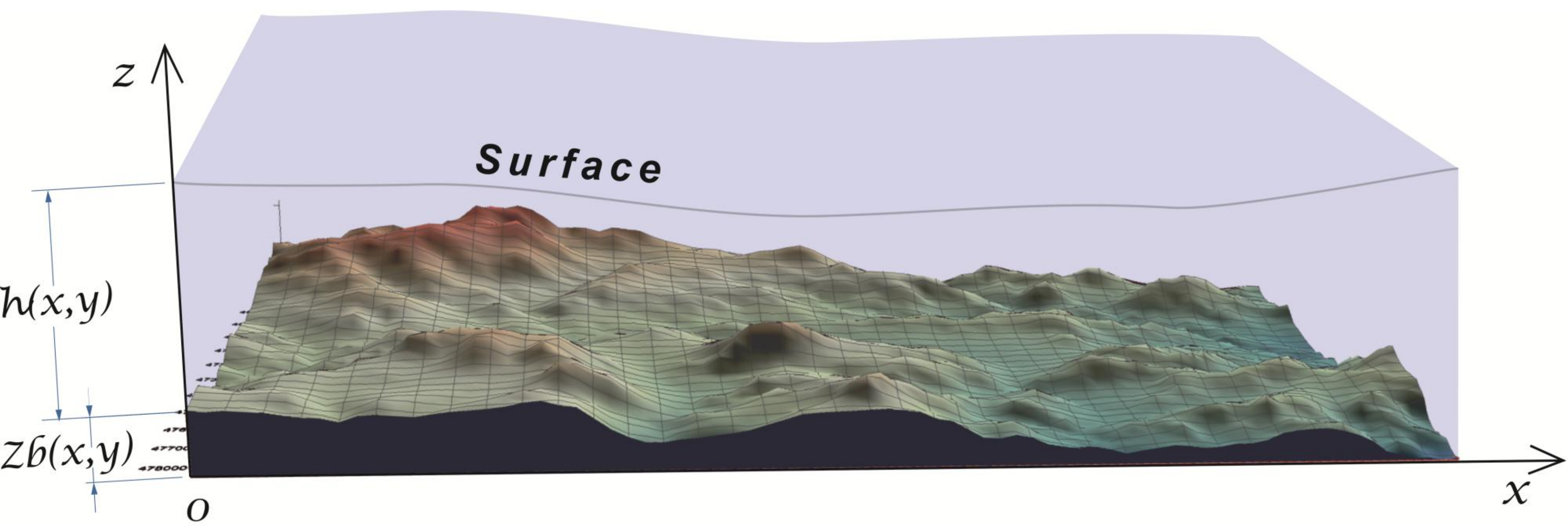
- Построена математическая модель течения в русле реки
- Построены конечно-объемные аппроксимации уравнений модели
- Разработан численный метод решения дискретных уравнений
- Метода протестирован для условий, приближенных к условиям течения в реке

# Физическая постановка задачи



Рассматривается турбулентное течение (Re=100000) воды в канале с нерегулярным дном. Начальная концентрация примеси в потоке принимается равной 0.

Требуется найти поле скоростей течения, глубину и распределение примеси в потоке.



# Математическая модель руслового течения реки



## В основу исследования положена двумерная нестационарная модель на основе уравнений мелкой воды

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (h\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial (h\overline{v})}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial (h\overline{u})}{\partial t}+\frac{\partial (h\overline{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial (h\overline{u}\,\overline{v})}{\partial y}=-gh\frac{\partial (z_b+h)}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial (h\overline{\tau}_{xx})}{\partial x}+$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (h\overline{\tau}_{xy})}{\partial y}+\frac{(\tau_{xz})_s-(\tau_{xz})_b}{\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial (z_b+h)}{\partial x}(\tau_{xx})_s-\frac{1}{\rho}\frac{\partial (z_b+h)}{\partial y}(\tau_{xy})_s,$$

$$\frac{\partial (h\overline{v})}{\partial t}+\frac{\partial (h\overline{v}\,\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial (h\overline{v}^2)}{\partial y}=-gh\frac{\partial (z_b+h)}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial (h\overline{\tau}_{yx})}{\partial x}+$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial (h\overline{\tau}_{yy})}{\partial y}+\frac{(\tau_{yz})_s-(\tau_{yz})_b}{\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial (z_b+h)}{\partial x}(\tau_{yx})_s-\frac{1}{\rho}\frac{\partial (z_b+h)}{\partial y}(\tau_{yy})_s,$$

$h(x,y,t)$ – *глубина*;
$\overline{u}(x,y,t)$, $\overline{v}(x,y,t)$ – *осредненные по глубине значения компонент вектора скорости* $\vec{W}=(u,v)$
$z_b(x,y)$ – *рельеф дна*;
$\rho$ – *плотность*;
$\overline{\tau}_{xx},\overline{\tau}_{xy},\overline{\tau}_{yx},\overline{\tau}_{yy}$ – *осредненные значения напряжений Рейнольдса*;
$(\tau_{yz})_s,(\tau_{yz})_b,(\tau_{yz})_s,(\tau_{yz})_b$ – *трение на поверхности и дне, соответственно*

# Гипотеза Буссинеска и замыкание модели



$$\frac{1}{\rho}\overline{\tau}_{ij} = \overline{\nu}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\overline{k}\,\delta_{ij}$$

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности

$$\frac{\partial\left(h\overline{k}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\overline{k}\,\overline{u}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\overline{k}\,\overline{v}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\overline{\nu}_t}{\sigma_k}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\overline{\nu}_t}{\sigma_k}\frac{\partial \overline{k}}{\partial y}\right) + \left(P_h + P_{kv} - \overline{\varepsilon}\right)h$$

Уравнение переноса диссипации кинетической энергии

$$\frac{\partial\left(h\overline{\varepsilon}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\overline{\varepsilon}\,\overline{u}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\overline{\varepsilon}\,\overline{v}\right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\overline{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\overline{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial y}\right) + \left(c_1\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{k}}P_h + P_{\varepsilon v} - c_2\frac{\overline{\varepsilon}^2}{\overline{k}}\right)h$$

Турбулентная вязкость $\overline{\nu}_t = c_\mu \dfrac{\overline{k}^2}{\overline{\varepsilon}}$

Параметры и константы модели $\sigma_\varepsilon = 1.3; \sigma_k = 1.0; c_1 = 1.44; c_2 = 1.92; c_\mu = 0.09; c_\Gamma = 0.135;$

$$P_h = \nu_t\left[2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right)^2\right] \qquad P_{kv} = c_k\frac{v_*^3}{h}; P_{\varepsilon v} = c_\varepsilon\frac{v_*^4}{h}; c_k = \frac{1}{\sqrt{c_f}}; c_\varepsilon = 3.6\frac{c_2}{c_f^{\frac{3}{4}}}\sqrt{c_\mu}; \overline{\Gamma}_t = c_\Gamma v_* h.$$

# Уравнение концентрации примеси



$$\frac{\partial(h\overline{c})}{\partial t}+\frac{\partial(h\overline{u}\,\overline{c})}{\partial x}+\frac{\partial(h\overline{v}\,\overline{c})}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(h\overline{\Gamma}_t\frac{\partial\overline{c}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\overline{\Gamma}_t\frac{\partial\overline{c}}{\partial y}\right),$$

$\overline{\Gamma}_t$ – *коэффициент турбулентной диффузии.*

# Аппроксимация конвективных слагаемых



## Схема MLU

$$(u\Phi)_w = \begin{cases} (u)_w\left[\Phi_W + \frac{1}{2}S_w\delta x\right], & u_w > 0; \\ (u)_w\left[\Phi_P - \frac{1}{2}S_w\delta x\right], & u_w \le 0; \end{cases}$$

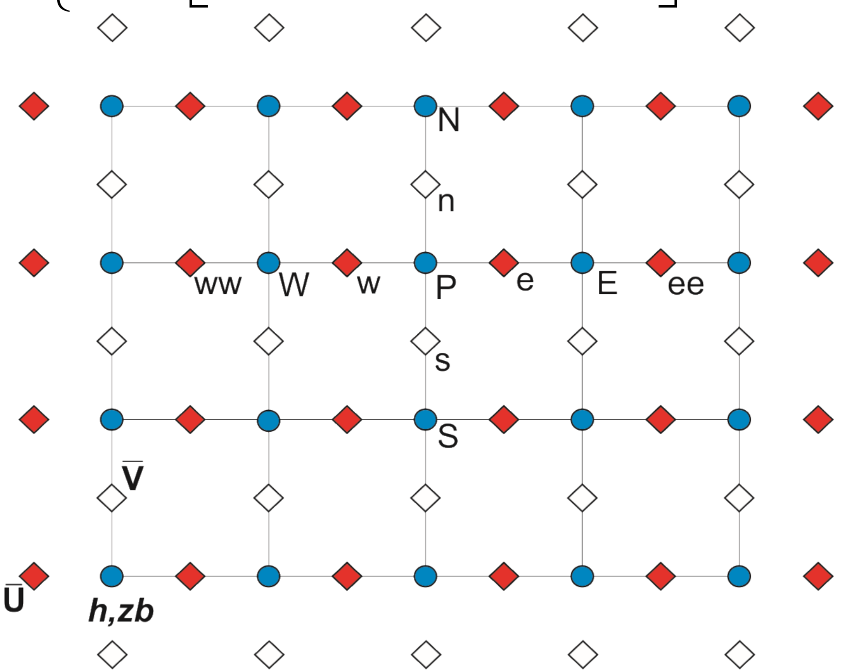
$$S_w = \min\bmod\left[(a+b)/2,\ 2\min\bmod[a,b]\right]$$

*–пределльное значение между наклонами* $a, b$:

$$a = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x};\ b = \begin{cases} \frac{\Phi_W - \Phi_{WW}}{\delta x}, & u_w > 0, \\ \frac{\Phi_P - \Phi_W}{\delta x}, & u_w \le 0. \end{cases}$$

## Схема MUSCL

$$(u\Phi)_w = \begin{cases} (u)_w\left[-\frac{1}{6}(\Phi_W + \Phi_P) + \frac{1}{3}\Phi_E\right], & u_w > 0; \\ (u)_w\left[\frac{1}{6}(\Phi_{EE} + \Phi_P) + \frac{1}{3}\Phi_P\right], & u_w \le 0. \end{cases}$$



# Алгоритм совместного решения уравнений неразрывности и движения



$h_P^0 - значение\ \ величины\ на\ предыдущем\ шаге\ по\ времени;$

$u_e^i - значение\ \ величины\ на\ предыдущей\ итерации;$

$\left\{u^*\right\}, \left\{v^*\right\} - приближенное\ значение\ компонент\ скорости;$

$$\left.\begin{aligned} u' &= u_e - u_e^* \\ v' &= v_n - v_n^* \\ h_P{}' &= h_P - h_P^i \end{aligned}\right\} \qquad поправки\ для\ величин.$$

# Алгоритм совместного решения уравнений неразрывности и движения



На каждом шаге по времени:

* 1. Задаем $\{u^i\} = \{u^0\},\ \{v^i\} = \{v^0\},\ \{h^i\} = \{h^0\}.$

* 2. Записав разностную схему в общем виде

$$a_e^u u_e^* = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb} + d_e^u \left(h_E^i - h_P^i\right) + b_e^u; \quad (1)$$

$$a_n^v v_n^* = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb} + d_n^v \left(h_N^i - h_P^i\right) + b_n^v. \quad (2)$$

решаем (1), (2) методом нижней релаксации и находим $\{u^*\}, \{v^*\}.$

* 3. Подставляя в (1), (2) значения $\{u^*\}, \{v^*\}$



И вычитая из исходных находим формулы поправки для компонент скорости

$$a_e^u u_e{}' = \sum_{nb} a_{nb}^u u_{nb}{}' + d_e^u \left( h_E{}' - h_P{}' \right); \qquad (3)$$

$$a_n^v v_n{}' = \sum_{nb} a_{nb}^v v_{nb}{}' + d_n^v \left( h_N{}' - h_P{}' \right). \qquad (4)$$

Пренебрегая слагаемыми с суммой, согласно идее С. Патанкара, получаем окончательно

$$u_e = u_e^* + d_e^u / a_e^u \left( h_E{}' - h_P{}' \right); \qquad (6)$$

$$v_n = v_n^* + d_n^v / a_n^v \left( h_N{}' - h_P{}' \right). \qquad (7)$$

* 4. Подставим (6), (7) в уравнение неразрывности



$$\frac{h_P^{\ i} - h_P^0}{\tau} + \frac{h_e^i}{\delta x}\left(u_e^* + \frac{d_e^u}{a_e^u}\left(h_E{}' - h_P{}'\right)\right) - \frac{h_w^i}{\delta x}\left(u_w^* + \frac{d_w^u}{a_w^u}\left(h_P{}' - h_W{}'\right)\right) +$$

$$\frac{h_n^i}{\delta y}\left(v_n^* + \frac{d_n^v}{a_n^v}\left(h_N{}' - h_P{}'\right)\right) + \frac{h_s^i}{\delta y}\left(v_s^* + \frac{d_n^v}{a_n^v}\left(h_P{}' - h_S{}'\right)\right) = 0;$$

и решив методом верхней релаксации полученное уравнение, находим $\left\{h'\right\}$.

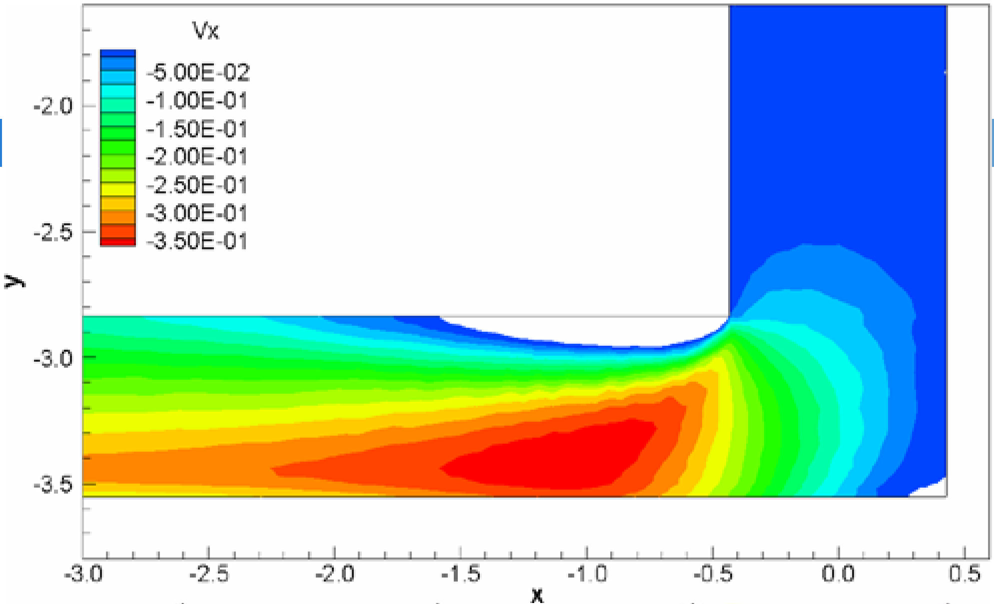
* 5. Корректируем компоненты скорости по (6), (7) и *h* по

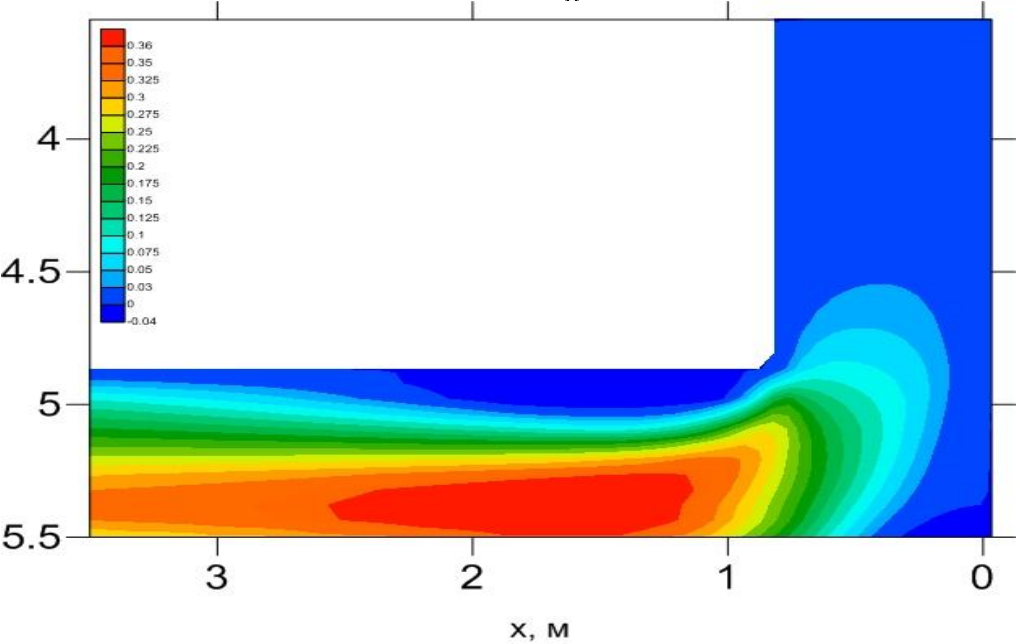
$$h^i = h^i + h'.$$

* 6. Если значение $\left\|h'\right\|$ велико, то присваиваем $u^i = u,\ v^i = v$

и переходим к шагу 2.

# Распределение $\overline{U}$




Расчет течения в канале с поворотом под прямым углом.

Входной участок: ширина **0,86м** и ровное дно.

Выходной участок: ширина **0,72м** и ровное дно.

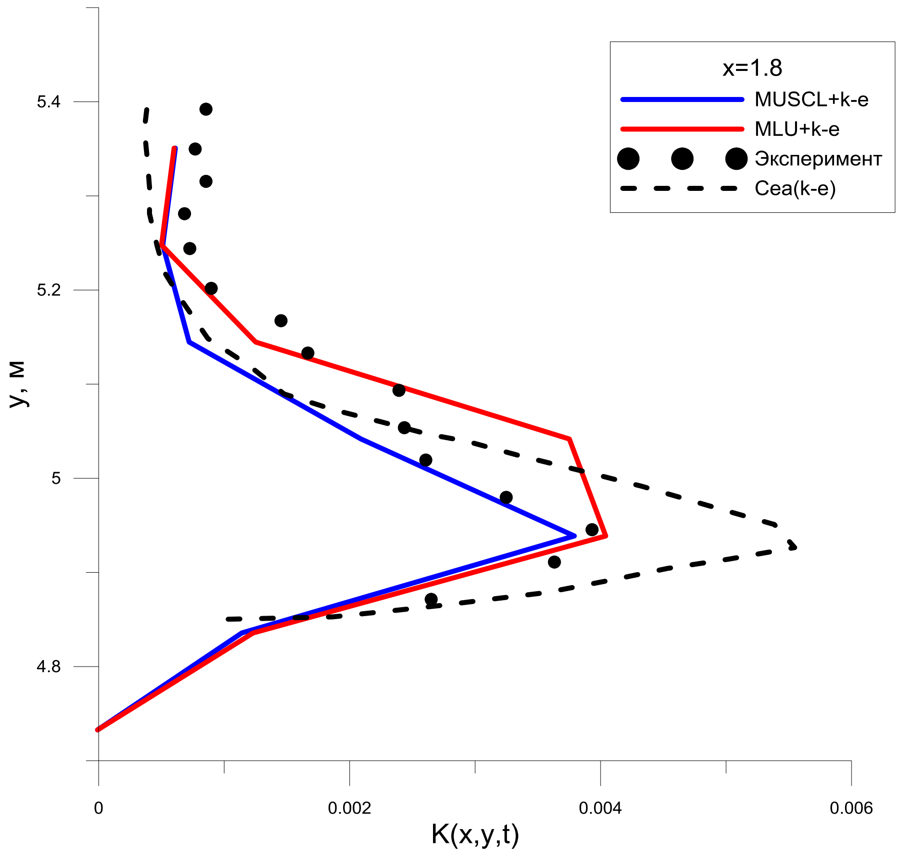
Сразу перед поворотом уровень дна понижается на **0,013м**.

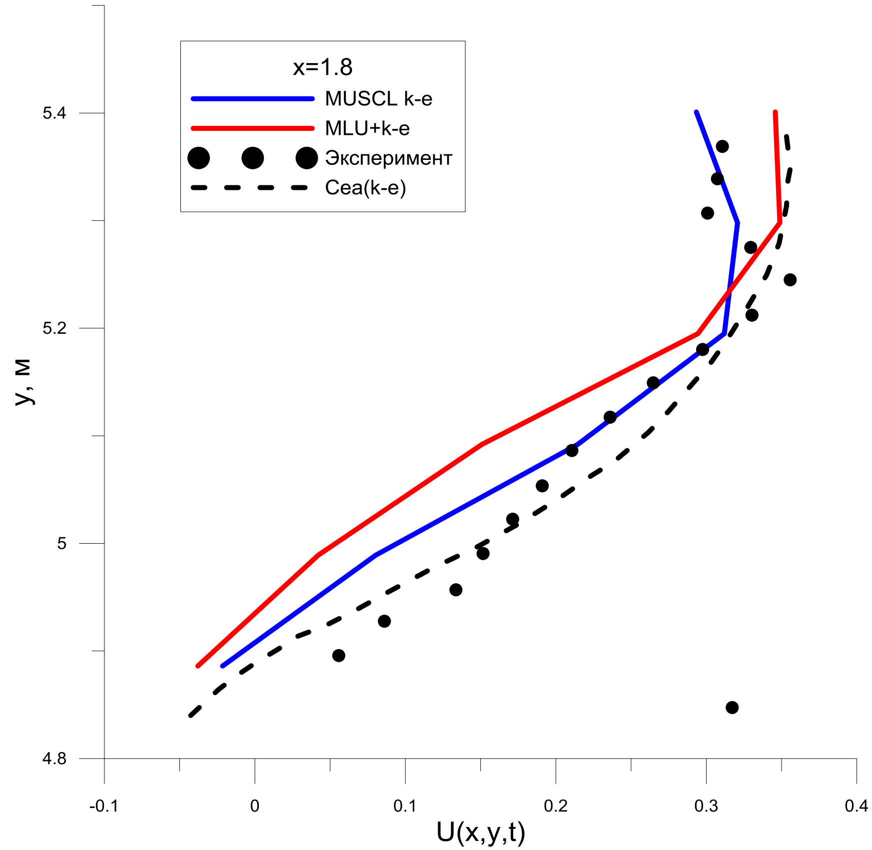
Средняя глубина воды **0,175м**, величина продольной компоненты скорости **0,2м/с.**

# Течение в канале с поворотом



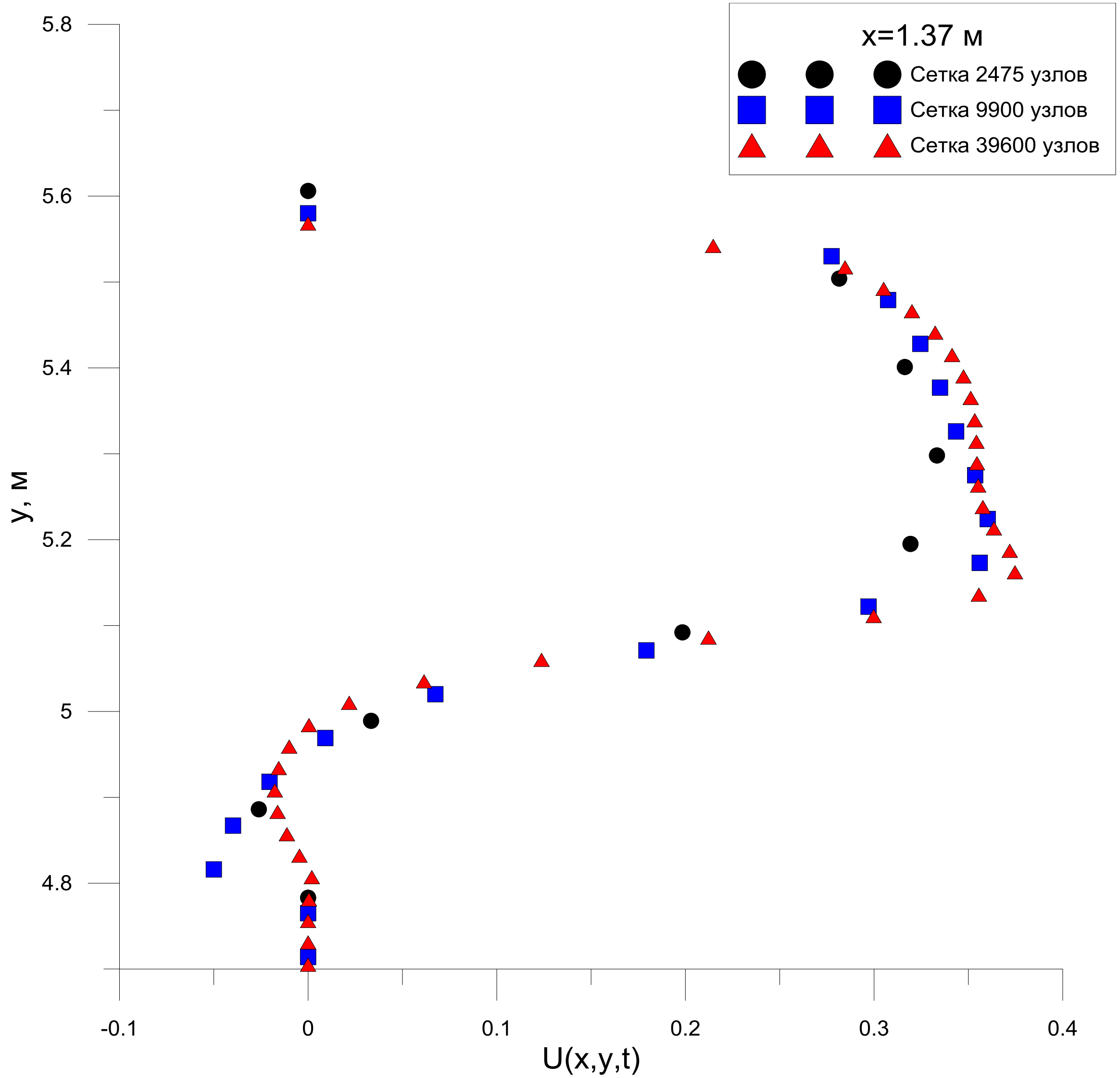
Распределение скорости $\overline{u}$ и энергии турбулентности **k** по ширине канала



# Сеточная сходимость решения



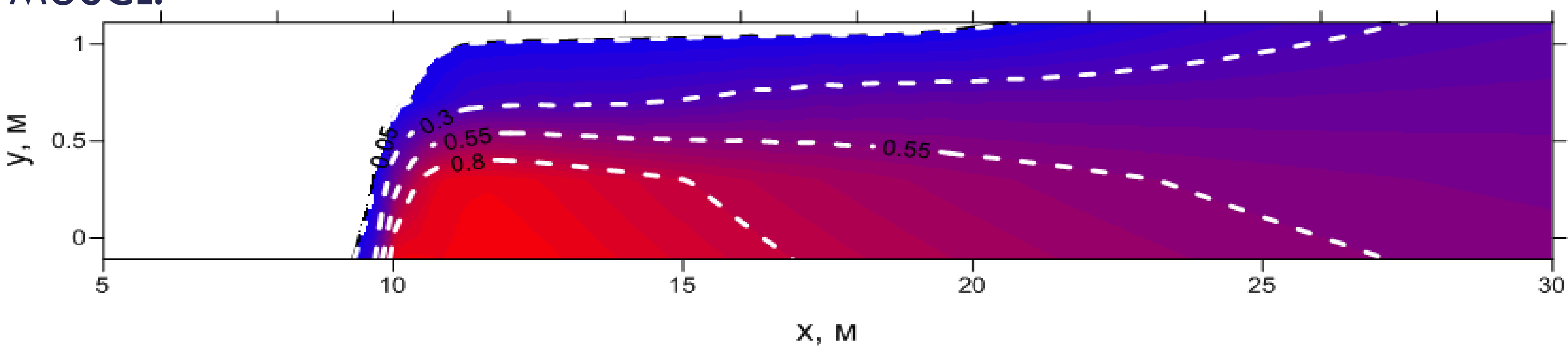


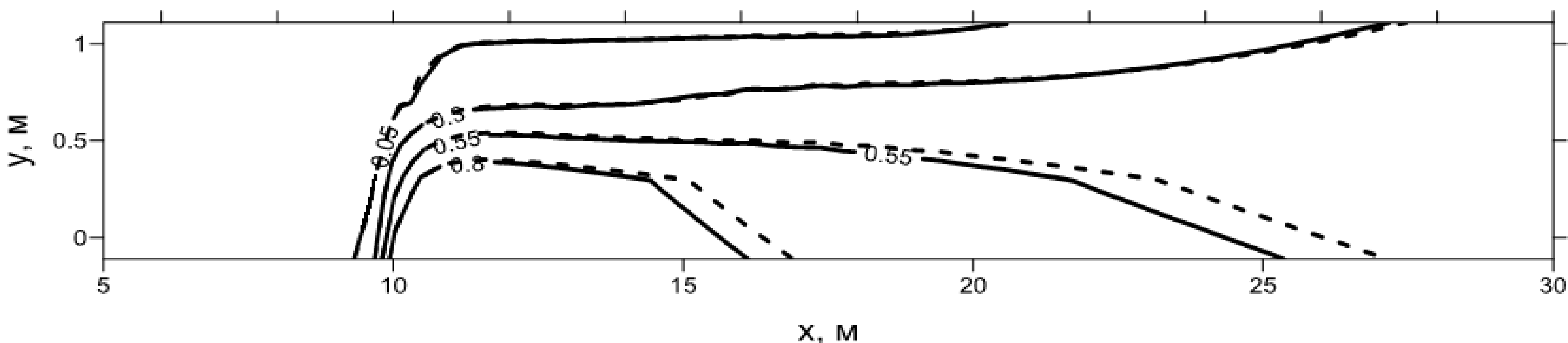

Продольная компонента скорости в сечении x=1.37 м. Последовательность сеток из 2475, 9900, 39600 узлов.

# Боковое втекание с примесью в движущийся поток



Размеры расчетной области: **40м х 1м**.
Отношение скорости притока к скорости течения в канале **0.5**.
Концентрация примеси в притоке **0.1**.
Сплошная линия - расчет по схеме MLU, пунктирная – расчет по схеме MUSCL.



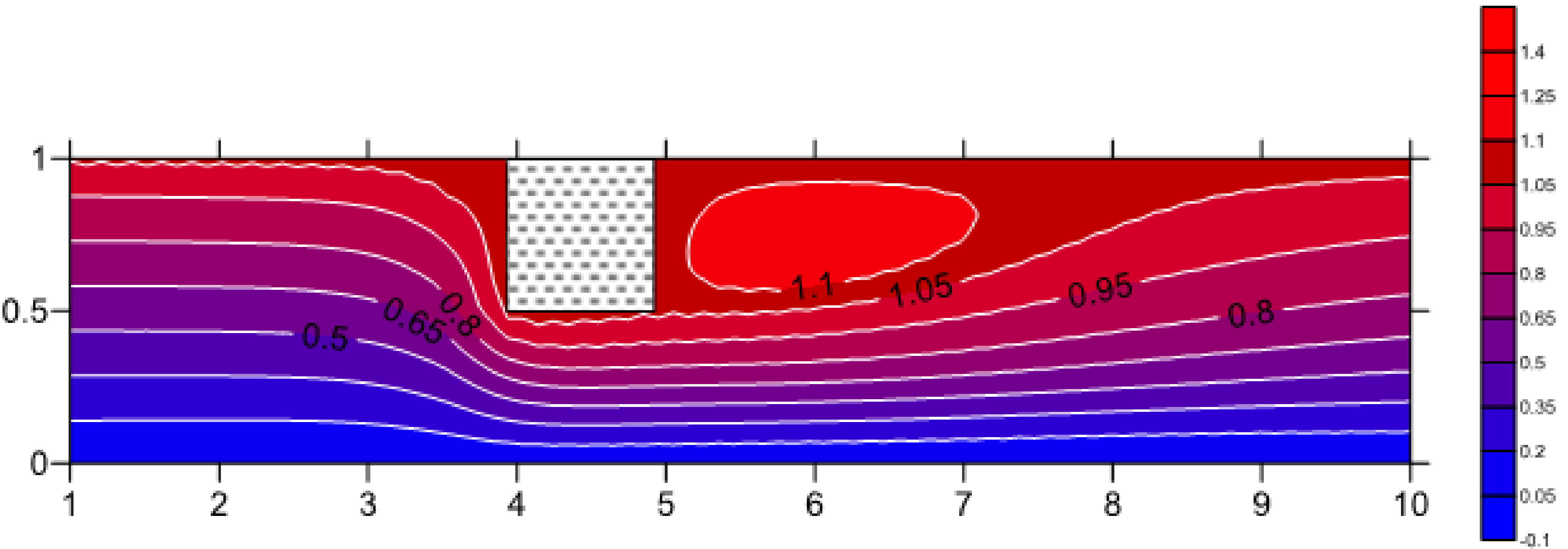
# Течение в канале с препятствием

Размеры расчетной области: **24м x 1м**.

Соотношение ширины канала и ширины препятствия **0.5**.

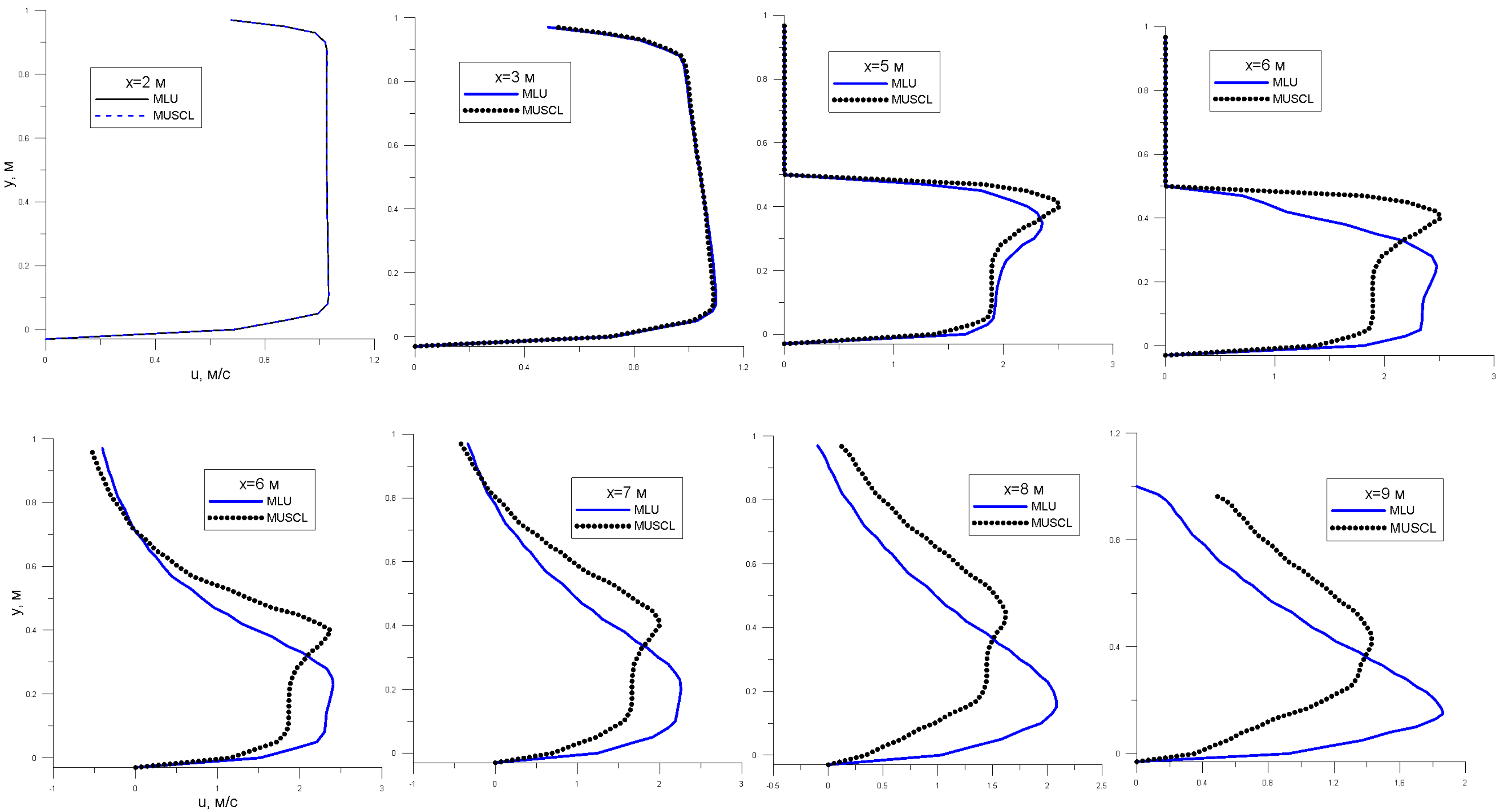
Скорость входного течения **1м/с**.

$$Re \sim 10^5$$



# Профили продольной скорости в различных сечениях





# Выводы



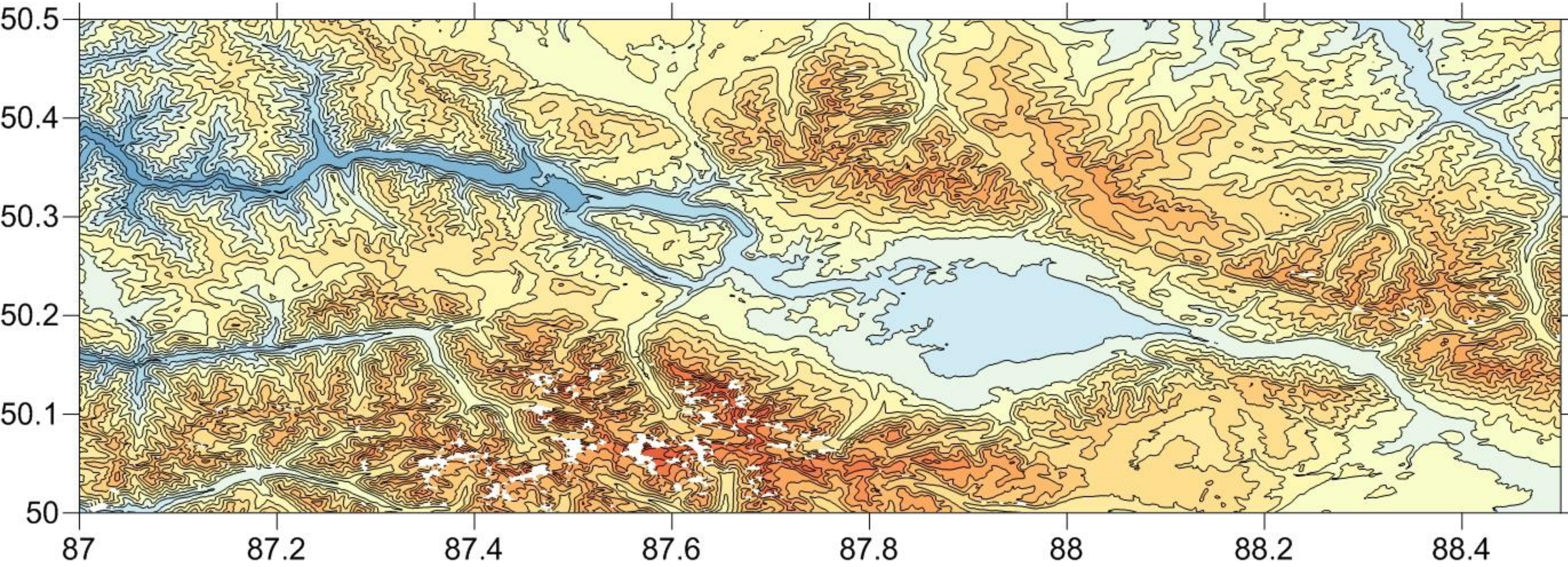
- Тестирование показало, что решатель позволяет получить качественный расчет наиболее важных характеристик течения (размера рециркуляционной зоны, общего расхода воды и уровня турбулентности).
- Осредненные по глубине уравнения хорошо предсказывают появление и размеры циркуляционной зоны за поворотом канала, что представляет значительную трудность при использовании трехмерной модели.
- Схема MUSCLE, обладающая меньшей схемной диффузией, дает более аккуратные численное решение для кинетической энергии турбулентности и профили скорости в сечениях после поворота канала.
- Сравнение численного решения приведенных задач с данными измерений показывает, что осредненные по глубине уравнения корректно воспроизводят основные образцы течения и могут быть использования для моделирования речного потока.
- Указанные достоинства показывают, что приближение мелкой воды является предпочтительным для расчета природных течений, где вычислительная стоимость решения трехмерных уравнений слишком высока.

# Дальнейшие направления исследования



Моделирование движения воды в Курайской котловине в процессе опорожнения озер Чуйское и Курайское вниз по Курайской котловине.

**Исходные данные:** цифровая модель рельефа моделью рельефа, полученной по данным космического зондирования земной поверхности (SRTM матрицы) с разрешением 93 м с севера на юг и 60 м с запада на восток (http://srtm.csi.cgiar.org).



# Литература




- Cea L., Puertas J., and Vazquez-Cendon M.E. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fonts // Archives of computational methods in engineering. September 2007. Vol. 14. No. 3. pp. 303-341.
- Kang S., Sotiropoulos F. Numerical modeling of 3D turbulent free surface flow in natural waterways // Advances in Water Resources. 2012. No. 40. pp. 23-36.
- Роди [11] В. Модели турбулентности окружающей среды // In: Методы расчета турбулентных течений. Москва: Мир, 1984. с. 276-278.
- Yu L., Zhu S.P. Numerical Simulation of Discharged Waste Heat and Contaminants into the South Estuary of the Yangtze River // Mathematical and computer modelling. 1993. Vol. 18. No. 12. pp. 107-123.
- Uijttewaal W.S.J. Hydrodynamics of shallow flows: application to rivers // Journal of Hydraulic Research. 2014. Vol. 52. No. 2. pp. 157-172.

Томский государственный университет,
механико-математический факультет,
лаборатория вычислительной геофизики.

**Старченко Александр Васильевич,**
**д. ф.-м. н., профессор. Декан ММФ ТГУ.**
**starch@math.tsu.ru**

**Чуруксаева Владислава Васильевна,**
**аспирант ММФ ТГУ.**
**chu.vv@mail.ru**

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ № 5.628.2014/К.