

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО «ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УДК
519.6

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по НР ТГУ,

профессор

_____ Дунаевский Г.Е.

«____» _____ 2007 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Государственный контракт № 02.517.11.9011
в рамках ФЦНТП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития
научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
профессор

_____ Старченко А.В.
подпись, дата

г. Томск 2007

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Научный руководитель, доктор физико-математических наук, профессор	_____	Старченко А.В. (раздел(ы):1,2)
	подпись, дата	

Исполнители темы

Аспирантка 2_го курса ММФ ТГУ	_____	Панасенко Е.А. (раздел(ы):1,2)
	подпись, дата	

РЕФЕРАТ

Отчет 28 с., 2 ч., 11 рис., 11 табл., 10 источников.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: прямая задача, обратная задача, математическое моделирование, адвективно-диффузионное уравнение, источниковый член, мгновенный источник, постоянный источник, пост наблюдения, разностная схема, параллельная реализация, ускорение параллельной реализации, эффективность параллельной реализации, принцип декомпозиции.

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЛИ РАЗРАБОТКИ: прямая и обратная задачи переноса примеси, описываемые уравнениями в частных производных.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: разработка метода решения обратных задач переноса примеси, в которых по известным данным измерений концентрации примеси определяется месторасположение, время и мощность выброса примеси.

МЕТОД ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ: исследование проводилось при помощи численных методов, с использованием языков программирования Delphi, Fortran; параллельная реализация осуществлялась с помощью принципа декомпозиции.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ: разработаны методы решения обратных модельных задач, в которых учитываются мгновенные и постоянные источники атмосферных загрязнений. Представлена постановка обратных задач, применены разностные схемы численного решения уравнений и представлен метод Марчука решения обратных задач. Создан процесс параллельной реализации обратной задачи, который осуществляется с помощью принципа декомпозиции.

ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ, ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ И ТЕХНИКО-ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ: вычислительный кластер СКИФ Cyberia;
Тип системы: кластер;
Процессорная архитектура: x86 с поддержкой 64 разрядных расширений;
Количество вычислительных узлов: 283/566 (один узел - управляющий) (1132 ядра);
Тип процессора: двухядерный Intel®Xeon™5150, 2,66ГГц(Woodcrest);
Скорость передачи сообщений между узлами: 950 Мб/сек с задержкой не более 2,5 мкс;
Пиковая производительность: 12 Тфлопс;
Реальная производительность на тесте Linpack: 9,013 Тфлопс;
Суммарный объем оперативной памяти: 1 136 Гб;
Суммарный объем дискового пространства: 22,56 Тб;
Внешняя дисковая система хранения данных: 10 Тб;
Параллельная файловая система: суммарная пропускная способность 700 Мб/сек;
Потребляемая мощность: 90 КВт;

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВНЕДРЕНИЮ ИЛИ ИТОГИ ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НИР: результаты работы могут использоваться в природоохранной деятельности;

ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ: математическое моделирование экологических процессов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	7
1. Прямая задача переноса примеси.....	9
1.1. Прямая задача с мгновенным источником. Общая постановка.....	9
1.2. Математическая постановка прямой задачи с мгновенным источником.....	9
1.3. Численное решение прямой задачи.....	10
1.4. Прямая задача с постоянным источником.Общая и математическая постановки.....	12
1.5. Экспериментальные расчеты прямой задачи с мгновенным источником.....	13
1.6. Экспериментальные расчеты прямой задачи с постоянным источником.....	14
2. Обратная задача.....	17
2.1. Обратная задача с мгновенным источником. Общая постановка.....	17
2.2. Математическая постановка обратной задачи с мгновенным источником.....	17
2.3. Численное решение обратной задачи с мгновенным источником	19
2.4. Параллельная реализация обратной задачи.....	20
2.5. Обратная задача с постоянным источником. Общая постановка.....	21
2.6. Численное решение обратной задачи с мгновенным источником	23
2.7. Результаты численных расчетов обратной задачи с мгновенным источником.....	23
2.8. Результаты численных расчетов обратной задачи с мгновенным источником.....	25
Заключение.....	27
Список использованных источников	28

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящем отчете о НИР использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.1 -2003 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.9 (ИСО 214-76) Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Реферат и аннотация. Общие требования.

ГОСТ 7.32-2001 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В настоящем отчете о НИР применяют следующие термины с соответствующими определениями:

Методы математического моделирования – запись дифференциального уравнения (системы уравнений), описывающего поведение объекта при различных начальных и граничных условиях.

Обратная задача – определение координат неизвестных источников атмосферной примеси и их интенсивности по измеренным в ограниченном количестве контрольных точек значениям концентрации загрязнений.

Сетка – конечное множество точек, принадлежащих области G , плотность распределения которых характеризуется шагом сетки h .

В настоящем отчете о НИР применяют следующие обозначения:

$C(x,y,t)$ - концентрация примеси в момент времени t в точке (x,y) ;

U, V - компоненты вектора скорости потока;

Γ - коэффициент турбулентной диффузии;

Q – источниковый член, определяемый как произведение d - функций;

Q_0 – количество выброшенного вещества (мощность источника);

t_0, x_0, y_0 – время и координаты выброса соответственно;

L_x, L_y - размеры области исследования;

$a_1, b_1, a_3, b_3, g_1, g_3$ - функции от y , используемые для определения граничных условий в прямой задаче;

$a_2, a_4, b_2, b_4, g_2, g_4$ - функции от x , используемые для определения граничных условий в прямой задаче;

v_{hl} - сетка;

x_i, y_j - узлы сетки;

F - значение потока;

$C^*(t_0, x_0, y_0)$ - значение решения сопряженной задачи при параметрах t_0, x_0, y_0 ;

p - число процессоров, используемых при параллельной реализации.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время проблема охраны окружающей среды и ее восстановления становится одной из важных задач науки, развитие которой стимулируется всевозрастающими темпами технического прогресса во всех странах мира. Интенсивное развитие промышленности и связанное с этим процессом увеличение промышленных выбросов, загрязняющих окружающую среду, уже становятся ощутимыми для экологического равновесия многих регионов нашей планеты [1]. Одной из наиболее актуальных проблем является проблема ухудшения качества атмосферного воздуха, накопления в нём газообразных компонентов, изменение его химического и аэрозольного состава вследствие выбросов в атмосферу отходов промышленных предприятий и выхлопных газов автотранспорта, приводящих к ухудшению здоровья населения, а в глобальном масштабе - к изменению климата на планете.

Таким образом, бурное развитие промышленности во всех странах мира поставило перед человечеством острую проблему – охраны окружающей среды, с целью сохранения экологических систем, сформировавшихся в различных регионах нашей планеты. Локальные загрязнения в результате выбросов промышленных предприятий во многих городах мира давно превзошли предельно допустимые санитарные нормы. Гигантские работы, связанные с добычей угля, железной руды, цветных металлов и других полезных ископаемых, привели к эрозии и загрязнению огромных территорий. Повышение концентрации углекислого газа в результате сжигания огромного количества углеводородов, вовлекаемых в большую энергетику, начинает сказываться на тепловом балансе нашей планеты. Все это приводит к глобальным нарушениям экологических систем. Поэтому важной задачей науки в настоящее время является прогноз изменения экологических систем под влиянием естественных и антропогенных факторов. Исходным моментом является исследование процесса загрязнения окружающей среды выбросами отходов промышленных предприятий; следующий этап заключается в оценке воздействия вредных загрязнений на биологическую среду. Развитие промышленности стало мощным импульсом для исследований, связанных с размещением новых промышленных предприятий и промышленных комплексов, оказывающих минимальное отрицательное воздействие на окружающую среду. Обострилась проблема загрязнения среды промышленными комплексами, для которых предельно допустимые санитарные нормы все еще не соответствуют современным требованиям [1].

Кроме того, среди задач по метеорологическим аспектам загрязнения атмосферы большое значение приобретают исследования закономерностей распространения атмосферных примесей и особенностей их пространственно-временного распределения. Они являются основой для объективной оценки состояния и тенденции изменений загрязнения воздушного бассейна, а также разработки возможных мероприятий по обеспечению чистоты атмосферы.

Характеристики загрязнения атмосферы сейчас все в большей степени рассматриваются как метеорологические величины. Поэтому создание системы наблюдений за загрязнением воздуха и анализ полученных результатов непосредственно смыкаются с метеорологическими задачами. Очевидно, что и решение вопросов о нормировании вредных выбросов непосредственно зависит от учета условий рассеивания их в атмосфере. Нужна разработка принципов взаимного размещения предприятий и жилых массивов и установление предельно допустимых выбросов в атмосферу.

Для мониторинга и прогноза экологического состояния атмосферы города наряду с инструментальными исследованиями успешно применяются методы математического моделирования. Однако сложность и взаимосвязанность процессов распространения, рассеяния и химической трансформации компонент примеси, происходящих в турбулентном атмосферном пограничном слое, делают модели прогнозирования качества воздуха громоздкими в математической записи и весьма требовательными к

вычислительным ресурсам. Кроме того, достоверный расчет переноса примеси в вертикальном направлении, особенно в условиях конвективного пограничного слоя, требует привлечения современных моделей турбулентности с алгебраическими соотношениями для определения турбулентных потоков импульса, массы и тепла, что само по себе представляет непростую задачу [2].

Таким образом, проблема взаимодействия человека с окружающей средой в настоящее время представляет новую и активно развивающуюся область применений методов математического моделирования.

Говоря об актуальности и новизне данной НИР, можно отметить, что в представляемой работе рассматриваются математические модели распространения примеси, которые направлены на решение проблемы взаимодействия человека с окружающей средой. Кроме того, описывается параллельная реализация данных моделей, которая увеличивает скорость вычисления поставленных задач. Один из принципов увеличения скорости вычислений основан на том, что некоторые части вычислительного алгоритма могут выполняться независимо друг от друга, то есть параллельно. В случае если доля распараллеливаемых частей алгоритма велика, отношение времени работы алгоритма ко времени работы распараллеленного алгоритма (то есть ускорение) может оказаться значительным.

В представляемой работе рассматриваются некоторые обратные задачи, в которых учитывались мгновенные и постоянные источники атмосферных загрязнений [3]. Излагается постановка задач, обсуждаются алгоритмы решения задач и используемые разностные схемы численного решения уравнений. Кроме того, представлен метод Марчука решения обратных задач, основанный на решении уравнения, сопряженного с полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии и двойственным представлением функционала от концентрации примеси [1].

Для аппроксимации адвективно-диффузионных уравнений использовались метод конечного объема и схема Ботта аппроксимации адвективных членов, которая является схемой четвертого порядка.

В качестве примера рассмотрена задача размещения нескольких постов наблюдения, которые измеряют выброс примесей от мгновенного и постоянного источников. При решении прямой задачи рассматривается следующая ситуация: ветер юго-западный и под его действием происходит перенос примеси, которую отслеживают посты наблюдений. Цель решения обратной задачи: по известным данным измерения концентрации примеси определить место, время и мощность выброса при известном поле ветра.

Для проверки правильности решений обратных задач (определения координат и интенсивности источника) использовались результаты решения прямой задачи в качестве необходимых входных данных.

В работе приведены примеры применения рассмотренного подхода для решения некоторых модельных задач, а также реальных для г. Томска.

Следует обратить внимание на то, что в данной работе при решении обратной задачи на каждом шаге по времени решается не одно, а N независимых сопряженных уравнений с различными источниковыми членами. Таким образом, рассматриваемая проблема идеально подходит для ее параллельной реализации. При использовании компьютера с параллельной архитектурой временные затраты на решение обратной задачи можно увеличить в p раз, где $0 < p \leq N$ - число используемых процессоров.

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ

1.1 Прямая задача с мгновенным источником. Общая постановка

При заданных координатах мгновенного точечного источника мощностью Q определить значения концентрации примеси в N точках.

Рассматривается прямоугольная область $L_x \times L_y$. Источник примеси расположен в точке с координатами (x_0, y_0) . Концентрация поступающей примеси рассчитывалась в прямоугольной области при различной ориентации направления движения сносящего потока.

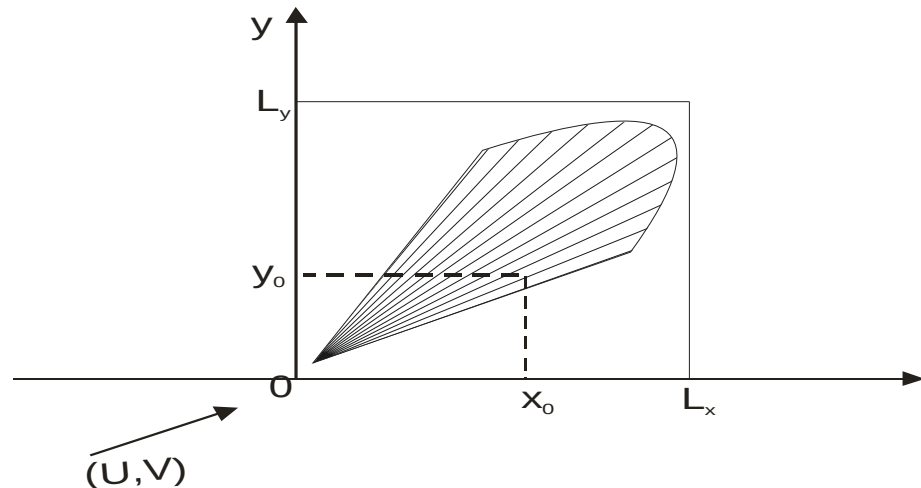


Рис.1 Направление ветра

1.2 Математическая постановка прямой задачи с мгновенным источником

Рассматривается уравнение «конвекции-диффузии», представляющее перенос примеси в заданном потоке в следующей форме [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial C}{\partial y} \right] + Q, \quad (1.1)$$

где C - концентрация примеси;

U, V - компоненты вектора скорости потока;

Γ - коэффициент турбулентной диффузии;

Q - источниковый член; $Q = Q_0 d(t - t_0) d(x - x_0) d(y - y_0)$;

Q_0 - количество выброшенного вещества (мощность источника);

t_0, x_0, y_0 - время и координаты выброса соответственно.

Начальные и граничные условия для уравнения (1.1) имеют вид:

$$t = 0 : C = 0;$$

$$x = 0 : a_1 \frac{\partial C}{\partial x} + b_1 C = g_1; \quad x = L_x : a_3 \frac{\partial C}{\partial x} + b_3 C = g_3 \quad (1.2)$$

$$y = 0 : a_2 \frac{\partial C}{\partial y} + b_2 C = g_2; \quad y = L_y : a_4 \frac{\partial C}{\partial y} + b_4 C = g_4,$$

где L_x, L_y - размеры области исследования,

$a_1, b_1, a_3, b_3, g_1, g_3$ - функции от y ,

$a_2, a_4, b_2, b_4, g_2, g_4$ - функции от x .

1.3 Численное решение прямой задачи

Для численного решения задачи (1.1)-(1.2) будем использовать метод конечных разностей [4] и метод конечного объема [5]. Метод конечных разностей (МКР) заключается в том, что производные в дифференциальной задаче заменяются по каким-либо формулам численного дифференцирования и ставится задача найти таблицу значений искомого решения. Как правило, этот метод приводит к решению СЛАУ, которое и дает таблицу значений решения.

При построении разностного аналога дифференциальной задачи сначала строим сетку. Для этого выберем шаги сетки $h_x, h_y > 0$ и на прямоугольной области $L_x \times L_y$ зададим сетку:

$$v_{h_x, h_y} = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = 0, 1, \dots, N_x, j = 0, 1, \dots, N_y\}.$$

Построенная сетка является разнесенной и используется при определении векторов скорости и концентрации.

Для построения разностной задачи будем использовать метод конечного объема. Основная идея метода конечного объема легко понятна и поддается прямой физической интерпретации. Расчетную область разбивают на некоторое число непересекающихся конечных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном конечном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому конечному объему. Для вычисления интегралов от членов уравнения используются различные интерполяционные формулы. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения концентрации в нескольких узловых точках. Таким образом, по методу конечного объема концентрация определяется в центре сеточной ячейки, в то время как компоненты вектора скорости определяются в средних точках на границах ячеек.

Одним из важных свойств метода конечного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе конечных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам [5].

В результате применения метода конечного объема к (1.1), уравнение во внутренних узлах сетки имеет вид:

$$\frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2j}^n - F_{i-1/2j}^n}{h_x} + \frac{G_{i+1/2j}^n - G_{i-1/2j}^n}{h_y} = Q_{ij},$$

где

$$F = UC - \Gamma \frac{\partial C}{\partial x}, \quad G = VC - \Gamma \frac{\partial C}{\partial y}$$

В данной работе при аппроксимации конвективных членов рассматривались следующие схемы: противопотоковая схема [5], схема MLU Ван Лира [7] и схема Ботта [6].

При использовании схемы против потока предполагается, что значение функции на грани конечного объема рассчитывается по значению функции в узле, находящемся с «подветренной» стороны (для адвективных членов уравнения):

$$F_{i+1/2,j}^n = \begin{cases} U_{i+1/2j} C_{ij}^n - \Gamma_{i+1/2j} \frac{C_{i+1j}^n - C_{ij}^n}{h_x}, & U_{i+1/2j} \geq 0, \\ U_{i+1/2j} C_{i+1j}^n - \Gamma_{i+1/2j} \frac{C_{i+1j}^n - C_{ij}^n}{h_y}, & U_{i+1/2j} < 0. \end{cases}$$

Противопотоковую схему получаем интегрированием каждого члена уравнения (1.1). Противопотоковая схема запишется для уравнения (1.1) в виде:

$$C_{ij}^{n+1} = C_{ij}^n + a_e (C_{i+1j}^n - C_{ij}^n) + a_w (C_{i-1j}^n - C_{ij}^n) + a_N (C_{ij+1}^n - C_{ij}^n) + a_S (C_{ij-1}^n - C_{ij}^n) + \Delta t Q_{ij},$$

где

$$a_e = \frac{\Delta t}{h_x} \left(\frac{\Gamma_{i+1/2j}}{h_x} + a \max 1(-U_{i+1/2j}, 0) \right), \quad a_w = \frac{\Delta t}{h_x} \left(\frac{\Gamma_{i-1/2j}}{h_x} + a \max 1(U_{i-1/2j}, 0) \right)$$

$$a_N = \frac{\Delta t}{h_y} \left(\frac{\Gamma_{ij+1/2}}{h_y} + a \max 1(-V_{ij+1/2}, 0) \right), \quad a_S = \frac{\Delta t}{h_y} \left(\frac{\Gamma_{ij-1/2}}{h_y} + a \max 1(V_{ij-1/2}, 0) \right).$$

В схеме MLU значение потока концентрации на грани конечного объема представимо в виде [7]:

$$F_{i+1/2j}^n = \begin{cases} U_{i+1/2j} (C_{ij}^n + S_{ij} \frac{h_x}{2}) - \Gamma_{i+1/2j} \frac{C_{i+1j}^n - C_{ij}^n}{h_x}, & U_{i+1/2j} \geq 0, \\ U_{i+1/2j} (C_{ij}^n + S_{ij} \frac{h_y}{2}) - \Gamma_{i+1/2j} \frac{C_{i+1j}^n - C_{ij}^n}{h_y}, & U_{i+1/2j} < 0, \end{cases}$$

$S_{ij} = \min \text{mod}[(a_{ij} + b_{ij}) / 2, 2 \cdot \min \text{mod}(a_{ij}, b_{ij})]$, функция $\min \text{mod}$ определяется, как

$$\min \text{mod}(a_{ij}, b_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_{ij} \cdot b_{ij} \leq 0 \\ b_{ij}, & \text{если } |a_{ij}| > |b_{ij}| \text{ и } a_{ij} \cdot b_{ij} > 0, \\ a_{ij}, & \text{если } |a_{ij}| \leq |b_{ij}| \text{ и } a_{ij} \cdot b_{ij} > 0, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_{ij} получаются из соотношений:

$$a_{ij} = \frac{C_{i+1j}^n - C_{ij}^n}{h_x}; \quad b_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ij}^n - C_{i-1j}^n}{h_x}, & U_{i+1/2j} > 0, \\ \frac{C_{i+2j}^n - C_{i+1j}^n}{h_x}, & U_{i+1/2j} \leq 0. \end{cases};$$

Для нашего случая схема MLU запишется в виде:

$$C_{ij}^{n+1} = C_{ij}^n + a_e (C_{i+1j}^n - C_{ij}^n) + a_w (C_{i-1j}^n - C_{ij}^n) + a_N (C_{ij+1}^n - C_{ij}^n) + a_S (C_{ij-1}^n - C_{ij}^n) + \Delta t Q_{ij} + d(S_{ij}),$$

где $d(S_{ij})$ - линейная комбинация наклонов S_{ij} решения.

Схема Ботта является обобщением схемы интегральных потоков за счет дополнительных шагов, которые позволяют сохранять неотрицательность решения и уменьшают фазовые ошибки.

Схема Ботта для уравнения (1.1) запишется в следующем виде [6]:

$$C_{ij}^{n+1} = C_{ij}^n - (I_{ij}^e + I_{ij}^w - I_{i+1j}^w - I_{i-1j}^e) - (I_{ij}^n + I_{ij}^s - I_{ij+1}^s - I_{ij-1}^n),$$

где

$$I_{ij}^e = \int_{1/2-a_{ij}^e}^{1/2} C_{ij}(x) dx, \quad I_{ij}^w = \int_{-1/2}^{-1/2+a_{ij}^w} C_{ij}(x) dx, \quad x = \frac{x-x_i}{h_x};$$

$$I_{ij}^n = \int_{1/2-b_{ij}^n}^{1/2} C_{ij}(V) dV, \quad I_{ij}^s = \int_{-1/2}^{-1/2+b_{ij}^s} C_{ij}(V) dV, \quad V = \frac{y-y_i}{h_y};$$

Число Куранта в направлениях x и y определяется следующим образом:

$$a_{ij}^{e,w} = \frac{U_{ij}^{e,w} \Delta t}{h_x}, \quad b_{ij}^{n,s} = \frac{U_{ij}^{n,s} \Delta t}{h_y}.$$

Противопотоковая схема - монотонная схема первого порядка по координате. Схема MLU имеет второй порядок на участках монотонного изменения функции, но является схемой первого порядка на участках немонотонного изменения функции. Схема Ботта - монотонная схема четвертого порядка аппроксимации. Все рассмотренные схемы условно устойчивы, что выражается в ограничении на шаг по времени Δt .

1.4 Прямая задача с постоянным источником. Общая и математическая постановки

При известном местоположении постоянного источника мощностью Q определить значения концентрации примеси в N точках.

Рассматривается прямоугольная область $L_x \times L_y$. Источник примеси расположен в точке с координатами (x_0, y_0) . Концентрация поступающей примеси рассчитывалась в прямоугольной области при различной ориентации направления движения сносящего потока (рис.1).

Уравнение «конвекции-диффузии», представляющее перенос примеси в заданном потоке в случае постоянного источника имеет вид [1]:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \frac{\partial C}{\partial y} \right] + Q, \quad (1.3)$$

где C - концентрация примеси;

U, V - компоненты вектора скорости потока;

Γ - коэффициент турбулентной диффузии;

Q - источниковый член; $Q = Q_0 d(x - x_0) d(y - y_0)$;

Q_0 - количество выброшенного вещества (мощность источника);

x_0, y_0 - координаты выброса.

Начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0 : C = 0; \quad x = L_x : \frac{\partial C}{\partial x} = 0; \\ y = 0 : C = 0; \quad y = L_y : \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где L_x, L_y - размеры области исследования.

При численном исследовании задачи (1.3)-(1.4) также использовался метод конечного объема и разностные схемы: противопотоковая схема, схема MLU Ван Лира и схема Ботта.

1.5 Экспериментальные расчеты прямой задачи с мгновенным источником

Для тестирования численных схем, рассмотренных в данной работе, была выбрана задача с известным аналитическим решением. При этом предполагалось, что коэффициент диффузии постоянен, а компонента скорости V равна нулю. Аналитическое решение записывается в виде:

$$C(t, x, y) = \frac{Q}{4pV(t-t_0)} \exp[-((x-x_0)-U(t-t_0))^2 + ((y-y_0)-v(t-t_0))^2] / 4V(t-t_0),$$

где x_0, y_0 - координаты источника.

В расчётах вектор скорости U равен постоянной величине 0.5 м/с, турбулентная диффузия тоже величина постоянная и равна 1.0, $L_x = 180\text{м}$, $L_y = 180\text{м}$, $x_0 = 0.25L_x$, $y_0 = 0.25L_y$.

По результатам численных расчетов строились графики, характеризующие распределение примеси в пространстве (рис.2-рис.4).

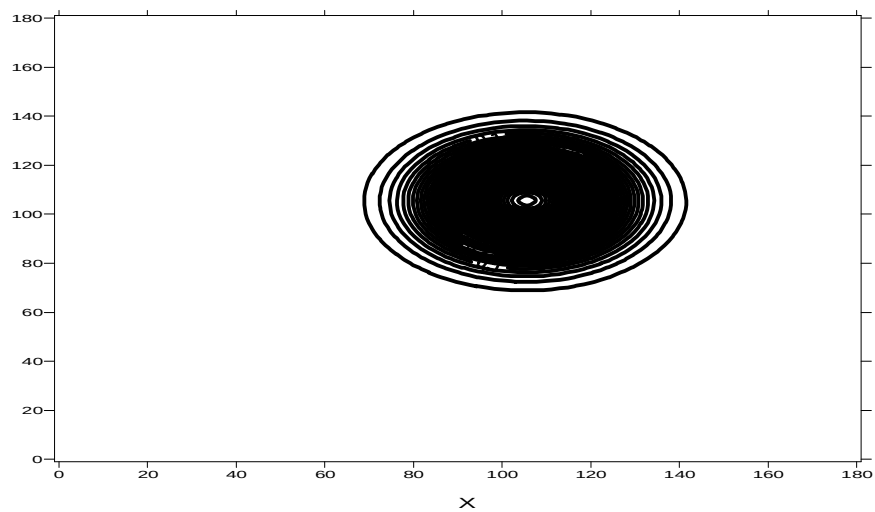


Рис.2 Распределение примеси в пространстве (схема Ботта)

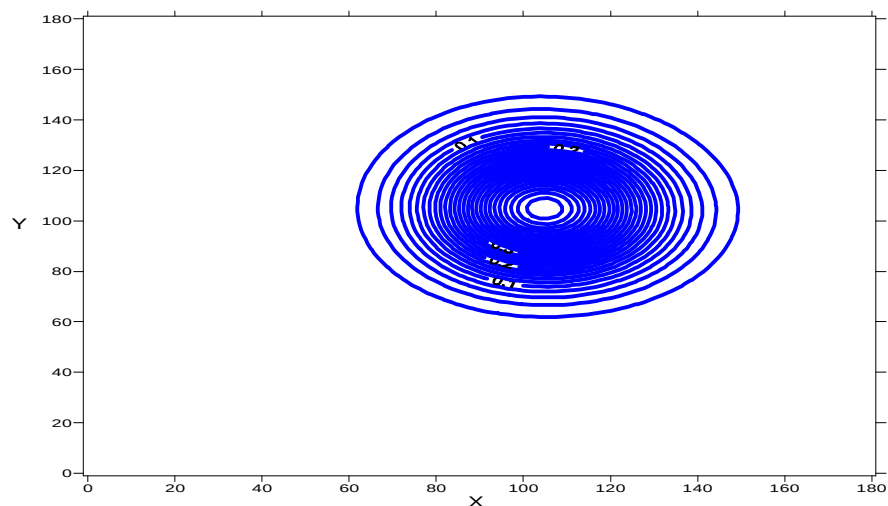


Рис.3 Распределение примеси в пространстве (схема UPWIND)

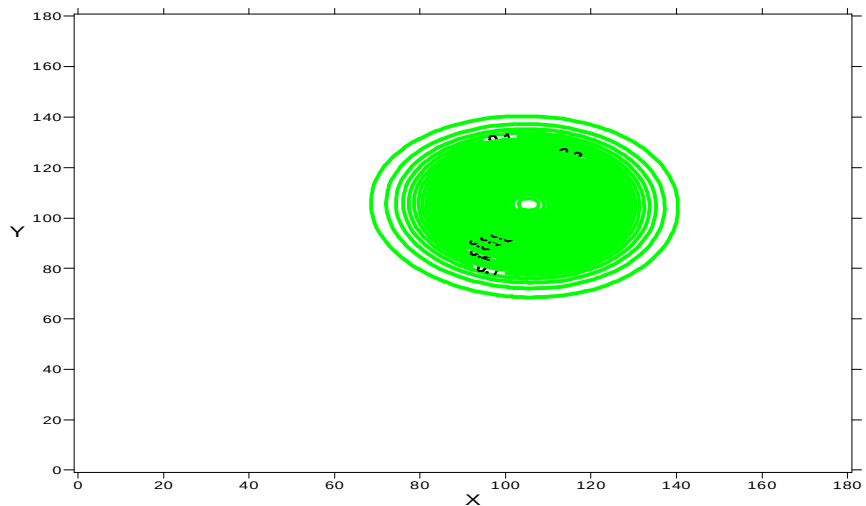


Рис.4 Распределение примеси в пространстве (схема MLU)

Рис. 2-4 - это распределение концентрации примеси после 150 секунд при срабатывании мгновенного источника мощностью $Q=1000$ в точке с координатами $x_0 = 45, y_0 = 45$ в момент срабатывания источника $t_0 = 15$ с.

1.6 Экспериментальные расчеты прямой задачи с постоянным источником

В численных расчётах задачи с постоянным источником брались следующие параметры: вектор скорости U равен постоянной величине 0.5 м/с, турбулентная диффузия тоже величина постоянная и равна 1.0, $L_x = 180$ м, $L_y = 180$ м, $x_0 = 0.25 \cdot L_x, y_0 = 0.25L_y$.

По результатам численных расчётов прямой двумерной задачи строились графики, характеризующие распределение примеси в пространстве (рис.6-8). Проводилось сравнение с известным аналитическим решением М.Е.Берлянда:

$$C(x, y) = \frac{Q}{2\sqrt{p(x-x_0)\Gamma/U}} \exp[-U(y-y_0)^2/4\Gamma(x-x_0)], x > x_0, y > y_0,$$

где x_0, y_0 - координаты источника.

На рис.5 приведены результаты сравнения рассмотренных ранее схем для данной задачи. По графикам видно, что наиболее точными являются схема MLU и схема Ботта. Результаты, полученные на основе этих схем, практически совпадают с аналитическим решением.

По результатам численных расчётов прямой двумерной задачи с постоянным источником строились графики, характеризующие распределение примеси в пространстве (рис.6-рис.8).

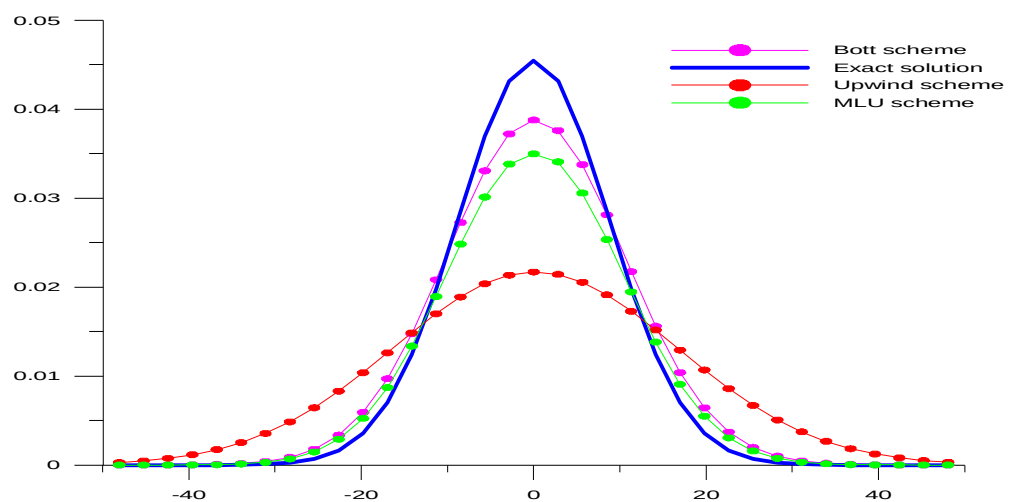


Рис.5 Сравнение разностных схем с точным решением

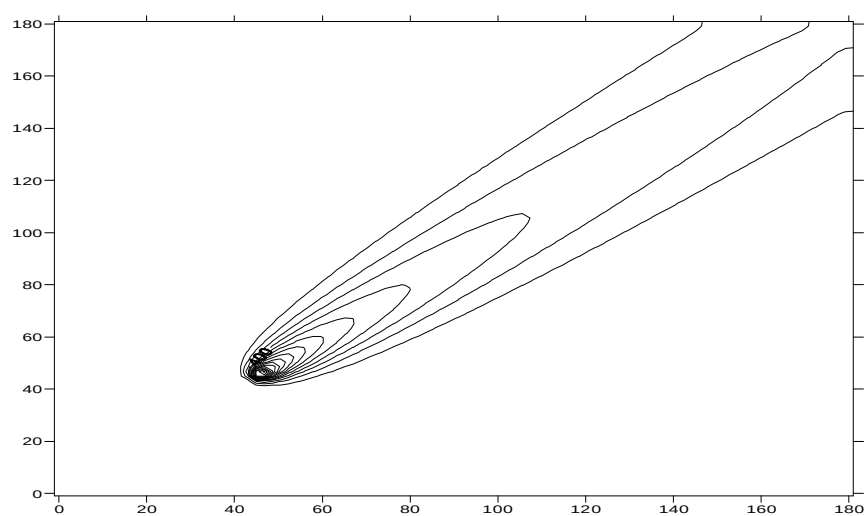


Рис. 6 Распределение примеси в пространстве (схема MLU)

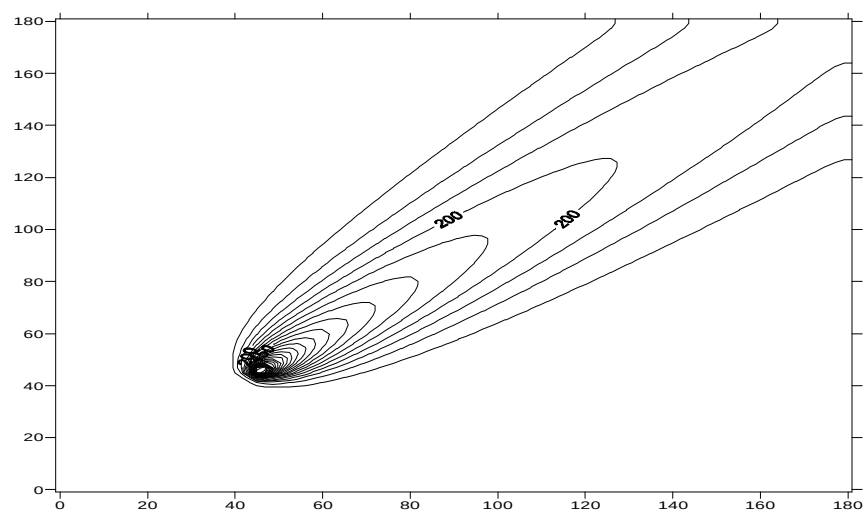


Рис.7 Распределение примеси в пространстве (схема Upwind)

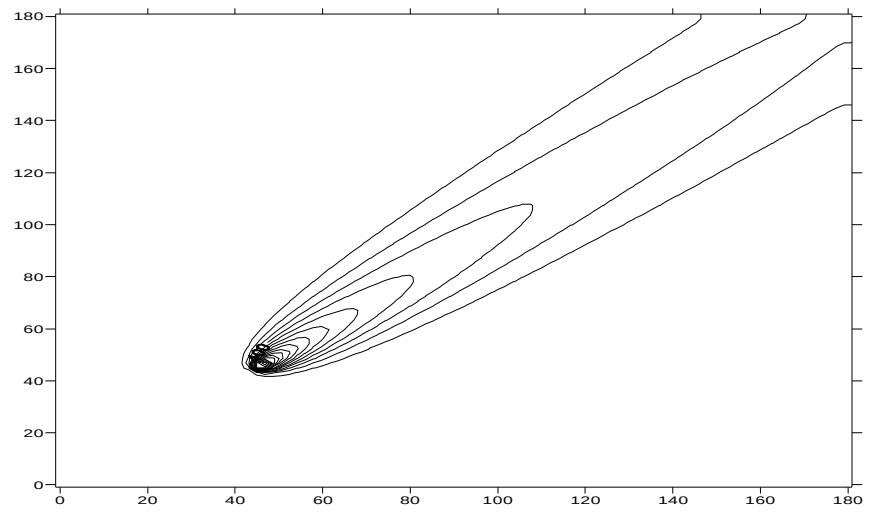


Рис.8 Распределение примеси в пространстве (схема Ботта)

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

2.1 Обратная задача с мгновенным источником. Общая постановка

При заданных метеорологических параметрах и результатах измерения концентрации примеси в N точках определить координаты и время срабатывания мгновенного точечного источника мощностью Q .

Для постановки обратной задачи используется метод Марчука [1], который основан на построении сопряженной с (1.1)-(1.2) задачи.

Рассматривается метод Марчука решения обратных задач рассеяния атмосферных примесей, основанный на решении уравнения, сопряженного с полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии, и двойственным представлением функционала от концентрации примеси [1]. В качестве примера рассмотрена задача размещения нескольких постов наблюдения, которые измеряют выброс примесей от мгновенного источника. При решении прямой задачи рассматривается следующая ситуация: ветер юго - западный и под его действием происходит перенос примеси, которую отслеживают посты наблюдений. Цель решения обратной задачи: по известным данным измерения концентрации примеси определить место, время и мощность выброса. На рис.9 проиллюстрирована данная задача:

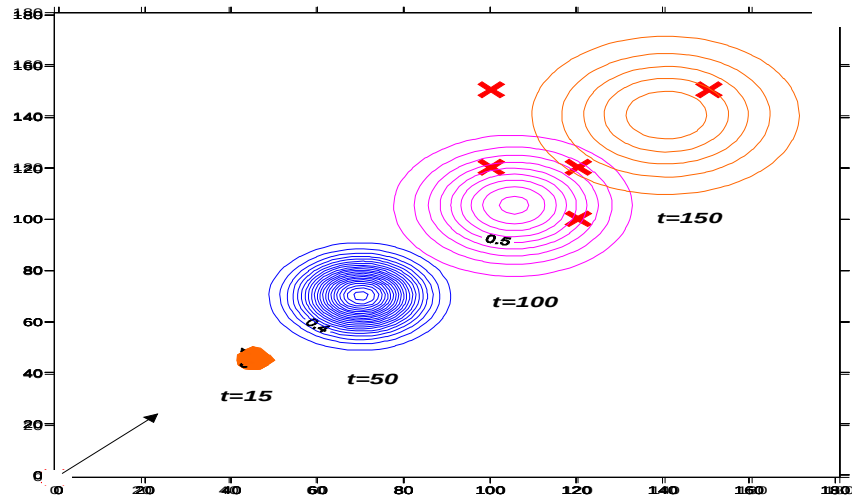


Рис.9 Размещение постов наблюдения (X)

2.2 Математическая постановка обратной задачи с мгновенным источником

Рассматривается двумерная прямая задача, описываемая уравнением «конвекции-диффузии», представляющее перенос примеси в заданном потоке в форме (1.1).

Обратная задача получается с использованием прямой, для этого уравнение (1.1) умножим на некоторую сопряженную функцию $C^* = C^*(t, x, y)$ и проинтегрируем по времени и по пространству:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* \frac{\partial C}{\partial t} dy dx dt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* U \frac{\partial C}{\partial x} dy dx dt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* V \frac{\partial C}{\partial y} dy dx dt = \\ & = \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial C}{\partial x} \right) dy dx dt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial C}{\partial y} \right) dy dx dt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* Q dy dx dt \end{aligned}$$

Используя свойства интегралов, приходим к выражению

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* \cdot C \Big|_0^T dydx - \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \frac{\partial C^*}{\partial t} dydxdt + \int_0^T \int_0^{L_y} U \cdot C^* \cdot C \Big|_0^{L_x} dydt - \\
& \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \frac{\partial UC^*}{\partial x} dydxdt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_x} V \cdot C^* \cdot C \Big|_0^{L_y} dxdt - \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \frac{\partial VC^*}{\partial x} dydxdt = \\
& \int_0^T \int_0^{L_y} \Gamma C^* \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_0^{L_x} dydt - \int_0^T \int_0^{L_y} \Gamma C \frac{\partial C^*}{\partial x} \Big|_0^{L_x} dydt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial C^*}{\partial x} \right) dydxdt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_x} \Gamma C^* \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_0^{L_y} dxdt - \int_0^T \int_0^{L_x} \Gamma C \frac{\partial C^*}{\partial y} \Big|_0^{L_y} dxdt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial C^*}{\partial y} \right) dydxdt + \\
& + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* Q dydxdt.
\end{aligned}$$

Последнее выражение может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \left(-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial C^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial C^*}{\partial y} \right) \right) dydxdt = \\
& = - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C \cdot C^* \Big|_0^T dydx - \int_0^T \int_0^{L_y} U \cdot C^* \cdot C \Big|_0^{L_x} dydt - \int_0^T \int_0^{L_y} V \cdot C^* \cdot C \Big|_0^{L_x} dxdt + \\
& + \int_0^T \int_0^{L_y} \Gamma C^* \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_0^{L_x} dydt - \int_0^T \int_0^{L_y} \Gamma C \frac{\partial C^*}{\partial x} \Big|_0^{L_x} dydt + \int_0^T \int_0^{L_x} \Gamma C^* \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_0^{L_y} dxdt - \\
& \int_0^T \int_0^{L_x} \Gamma C \frac{\partial C^*}{\partial y} \Big|_0^{L_y} dxdt + \int_0^T \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} C^* Q dydxdt.
\end{aligned}$$

Предположим, что C^* удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} - \frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial y} = P, 0 \leq t < T \quad (2.1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$x=0: C^*=0 \quad y=0: C^*=0$$

$$x=L_x: UC^* + \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial x} = 0 \quad y=L_y: VC^* + \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial y} = 0; \quad (2.2)$$

$$C^*(T, x, y) = 0;$$

где $P = d(t - t_i) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), i = 1, \dots, N$, N -количество точек наблюдения с координатами (x_i, y_i) , а t_i -это момент времени, тогда $C(t_i, x_i, y_i) = \max_{0 < t \leq T} C(t, x_i, y_i)$.

С учетом начальных и граничных условий прямой и обратной задач можно записать следующее двойственное представление функционала [1,7]:

$$J = \int_0^T dt \int_G P C dG = \int_0^T dt \int_G C_* Q dG; \Rightarrow C(t_i, x_i, y_i) = Q_0 C_i^*(t_0, x_0, y_0),$$

где

t_0, x_0, y_0 – время и координаты выброса соответственно;

Q_0 – его мощность;

$C_i^*(t_0, x_0, y_0)$ - значение решения сопряженной задачи при t_0, x_0, y_0 с $P = d(t - t_i)d(x - x_i)d(y - y_i)$

Из выражения $C(t_i, x_i, y_i) = Q_0 C_i^*(t_0, x_0, y_0)$ можно найти мощность источника:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{C_i^*(t_0, x_0, y_0)}{C(t_i, x_i, y_i)}, i = 1, \dots, N, \text{ тогда для нахождения параметров источника примеси}$$

можно записать следующее выражение:

$$\frac{C_1^*(t_0, x_0, y_0)}{C(t_1, x_1, y_1)} = \frac{C_2^*(t_0, x_0, y_0)}{C(t_2, x_2, y_2)} = \dots = \frac{C_N^*(t_0, x_0, y_0)}{C(t_N, x_N, y_N)} = \frac{1}{Q_0}$$

Для нахождения параметров источника Q_0, x_0, y_0, t_0 был построен следующий функционал:

$$f(Q, x, y, t) = \sum_{i=1}^N (Q_0 C_i^*(t, x, y) - C(t_i, x_i, y_i))^2, \quad (2.3)$$

который рассматривался при одновременном параллельном решении N сопряженных задач с различными правыми частями $P = d(t - t_i)d(x - x_i)d(y - y_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Минимум функционала соответствовал точке, моменту времени и мощности мгновенного источника, т.е.

$$f(Q_0, x, y, t) = \min_{\substack{0 \leq x \leq L_x \\ 0 \leq y \leq L_y \\ 0 \leq t \leq T \\ Q_t > 0}} f(Q_t, x, y, t)$$

В соответствии с необходимым условием экстремума функции нескольких переменных можно найти Q_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial Q_0} = 0: 2 \sum_{i=1}^N C_i^*(t_0, x_0, y_0) (Q_0 C_i^*(t_0, x_0, y_0) - C(t_i, x_i, y_i)) = 0,$$

следовательно,

$$Q_0 = \frac{\sum_{i=1}^N (C_i^*(t_0, x_0, y_0) * C(t_i, x_i, y_i))}{\sum_{i=1}^N (C_i^*(t_0, x_0, y_0))^2} \quad (2.4)$$

Подставим это выражение в (2.3) и далее будем искать минимум функционала:

$$f_1(x, y, t) = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{j=1}^N (C_j^*(t, x, y) C(t_i, x_i, y_i))}{\sum_{j=1}^N (C_j^*(t, x, y))^2} C_i^*(t, x, y) - C(t_i, x_i, y_i) \right) \right]^2$$

путем одновременного параллельного решения N обратных задач. Фиксация минимума $f_1(x, y, t)$ позволит найти координаты и момент срабатывания мгновенного источника, а по формуле (2.4) установить его мощность.

2.3 Численное решение обратной задачи с мгновенным источником

Для численной реализации задачи (2.1) – (2.2) использовались метод конечного объема и разностные схемы: схема MLU, противопотоковая схема и схема Ботта аппроксимации адвективных членов.

При построении разностного аналога предложенной выше задачи выбирается ячейка сетки (конечный объем) [4] и уравнение в частных производных интегрируется по конечному объёму, а для вычисления интегралов от членов уравнения используются различные интерполяционные формулы.

Сетка: $v_{h_x, h_y} = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y\}, i = 0, 1, \dots, N_x, j = 0, 1, \dots, N_y\}$.

Для аппроксимации дифференциальной задачи использовался метод конечного объёма, в результате применения которого уравнение во внутренних узлах сетки имеет вид:

$$\frac{(C_k^*)_{ij}^{n+1} - (C_k^*)_{ij}^n}{\Delta t'} + \frac{F_{i+1/2j}^n - F_{i-1/2j}^n}{h_x} + \frac{G_{i+1/2j}^n - G_{i-1/2j}^n}{h_y} = (P_k)_{ij},$$

где

$$F = -UC_k^* - \Gamma \frac{\partial C_k^*}{\partial x}, \quad G = -VC_k^* - \Gamma \frac{\partial C_k^*}{\partial y}, \quad t' = T - t, \quad t = T \dots 0,$$

$$P_k = d(t - t_k)d(x - x_k)d(y - y_k).$$

2.4 Параллельная реализация обратной задачи

При моделировании атмосферных процессов можно выделить два основных способа параллельной реализации алгоритмов: распараллеливание по физическим процессам и декомпозиция расчетной области. При первом способе параллельно выполняющиеся вычислительные потоки (процессы) заняты выполнением принципиально разных задач. В таком случае возникает сложность, связанная с балансировкой, то есть с равномерным распределением вычислительной нагрузки между параллельными процессами – чем лучше выполнена балансировка, тем меньше времени будет выполняться задача в целом.

Более универсальным является подход, опирающийся на декомпозицию расчетной области. Область исследования делится на подобласти количеством равным числу процессов, и каждый процесс ведет расчеты в своей подобласти независимо от других процессов. При таком подходе объем вычислений каждого процесса в данном случае если не одинаков, то, по крайней мере, очень близок между собой. Как правило, равномерность вычислительной нагрузки на процессы напрямую определяется равномерностью декомпозиции расчетной области [9].

Следует обратить внимание на то, что при решении обратной задачи на каждом шаге по времени решается не одна, а N прямых задач. Таким образом, можно сделать вывод, что рассмотренная задача идеально подходит для ее параллельной реализации. При распараллеливании значительно увеличится скорость решения.

Такие условия проведения численного прогноза заставляют привлекать высокопроизводительную вычислительную технику, в частности, вычислительный кластер СКИФ Cyberia, на котором установлена библиотека передачи сообщений MPI (Message Passing Interface) [10]. Эта библиотека функций обеспечивает возможность обмена информацией между процессами параллельной программы, запущенными на многопроцессорной вычислительной системе.

Распараллеливание численного метода решения задачи (2.1)-(2.2) производилось с использованием геометрического принципа – декомпозиции по данным. Вся область исследования разделялась на одинаковые подобласти. Все сеточные значения концентрации равномерно распределялись по вычислительным узлам многопроцессорной системы с распределенной памятью. Внутри каждой подобласти сеточные уравнения, полученные в результате принятого подхода дискретизации уравнения (2.1), решались одновременно с помощью явных разностных схем [10].

Параллельная реализация производилась по принципу клиент-сервер. При такой реализации, сервер передает каждому процессу значения, необходимые ему для расчетов, а процессы в свою очередь ведут расчеты независимо друг от друга и полученные результаты передают на сервер. Тогда сервер проводит конечные вычисления и выдает результат.

В нашем случае сервер передает каждому процессу значения параметров постов наблюдения, скорость, размеры области, коэффициент диффузии. Каждый из процессов получает решение сопряженной задачи и передает его серверу, который в свою очередь обрабатывает полученные значения, вычисляет функционал и получает таким образом параметры источника в определенный момент времени, затем время увеличивается и сервер передает процессам новые значения параметров постов наблюдения и т.д. до окончания счета.

На рис.10 представлена характеристика ускорения рассмотренного выше параллельного алгоритма решения задачи, полученные при ее запуске на вычислительном кластере СКИФ Cyberia

Ускорение рассчитывается как отношение времени выполнения всей задачи на одном процессоре к времени решения задачи на p процессорах. Из рис.10 видно, что при выполнении параллельной программы на 5 процессорах вычислительного кластера СКИФ Cyberia при указанных выше параметрах удастся получить ускорение вычислений почти в 5 раз.

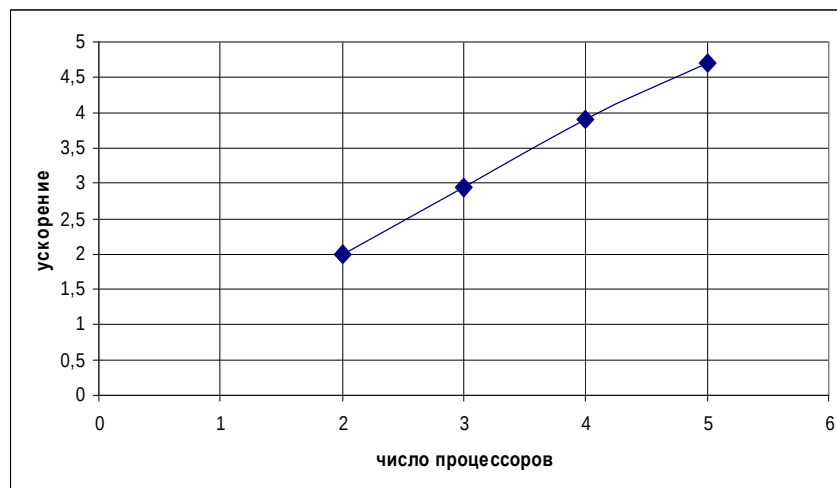


Рис.10 Ускорение параллельной реализации алгоритма

2.5 Обратная задача с постоянным источником. Общая постановка

При заданных метеорологических параметрах и результатах измерения концентрации примеси в N точках определить координаты и мощность постоянного источника.

Обратная задача с постоянным источником получается аналогично обратной задачи с мгновенным источником (уравнение, описывающее прямую задачу с постоянным источником, умножается на некоторую сопряженную функцию $C^* = C^*(x, y)$ и интегрируется по времени и по пространству).

Предположим, что C^* удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\partial UC^*}{\partial x} - \frac{\partial VC^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial y} = P, \quad (2.5)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$x=0: C^*=0 \quad y=0: C^*=0$$

$$x=L_x: UC^* + \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial x} = 0 \quad y=L_y: VC^* + \Gamma \frac{\partial C^*}{\partial y} = 0; \quad (2.6)$$

$$C^*(x, y) = 0;$$

где $P = d(x - x_i)d(y - y_i), i = 1, \dots, N$, N -количество точек наблюдения с координатами (x_i, y_i) .

С учетом начальных и граничных условий прямой и обратной задач можно записать следующее двойственное представление функционала [1,7]:

$$J = \int_G P C dG = \int_G C^* Q dG; \Rightarrow C(x_i, y_i) = Q_0 C_i^*(x_0, y_0).$$

Из последнего выражения можно найти мощность источника:

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{C_i^*(x_0, y_0)}{C(x_i, y_i)}, i = 1, \dots, N, \text{ тогда для нахождения параметров источника примеси}$$

можно записать следующее выражение:

$$\frac{C_1^*(x_0, y_0)}{C(x_1, y_1)} = \frac{C_2^*(x_0, y_0)}{C(x_2, y_2)} = \dots = \frac{C_N^*(x_0, y_0)}{C(x_N, y_N)} = \frac{1}{Q_0}$$

Также как и для задачи с мгновенным точечным источником, для нахождения параметров постоянного источника был построен следующий функционал:

$$f(Q_0, x, y) = \sum_{i=1}^N (Q_0 C_i^*(x, y) - C(x_i, y_i))^2, \quad (2.7)$$

который рассматривался при одновременном параллельном решении N сопряженных задач с различными правыми частями $P = d(x - x_i)d(y - y_i), i = 1, \dots, N$.

При этом

$$f(Q_0, x, y) = \min_{\substack{0 \leq x \leq L_x \\ 0 \leq y \leq L_y \\ Q_i > 0}} f(Q, x, y)$$

В соответствии с необходимым условием экстремума функции нескольких переменных можно найти Q_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Q_0} = 0 &:: 2 \sum_{i=1}^N C_i^*(x_0, y_0) (Q_0 C_i^*(x_0, y_0) - C(x_i, y_i)) = 0, \text{ следовательно,} \\ Q_0 &= \frac{\sum_{i=1}^N (C_i^*(x_0, y_0) * C(x_i, y_i))}{\sum_{i=1}^N (C_i^*(x_0, y_0))^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставим это выражение в (2.7) и найдем минимум функционала:

$$f_1(x, y) = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{j=1}^N (C_j^*(x, y) C(x_i, y_i))}{\sum_{j=1}^N (C_j^*(x, y))^2} C_i^*(x, y) - C(x_i, y_i) \right)^2 \right].$$

Фиксация минимума $f_1(x, y)$ позволит найти координаты источника, а по формуле (2.8) установить его мощность.

Математическая постановка обратной задачи с постоянным источником аналогична постановке для случая мгновенного источника.

2.6. Численное решение

Для аппроксимации рассматриваемой дифференциальной задачи (2.5) – (2.6) также использовался метод конечного объёма, в результате применения которого уравнение во внутренних узлах сетки имеет вид:

$$\frac{F_{i+1/2j}^n - F_{i-1/2j}^n}{h_x} + \frac{G_{i+1/2j}^n - G_{i-1/2j}^n}{h_y} = (P_k)_{ij}, \text{ где}$$

$$F = -UC_k^* - \Gamma \frac{\partial C_k^*}{\partial x}, \quad G = -VC_k^* - \Gamma \frac{\partial C_k^*}{\partial y}, \quad P_k = d(x - x_k)d(y - y_k).$$

Для численной реализации описанной схемы использовались: противопотоковая схема, схема MLU Ван Лира и схема Ботта.

2.7 Результаты численных расчетов обратной задачи с мгновенным источником

При решении обратной задачи для проверки правильности решения (определения координат и интенсивности источника) использовались результаты решения прямой задачи в качестве необходимых входных данных.

В расчётах вектор скорости $\vec{w} = (u, v)$ имел юго – западное направление и модуль 0.5 м/с, турбулентная диффузия тоже величина постоянная и равна 1.0, $L_x = 180\text{м}$, $L_y = 180\text{м}$.

При решении прямой задачи источник располагался в точке: $x_0 = 0.25 \cdot L_x$, $y_0 = 0.25 L_y$, срабатывал в момент времени $t_0 = 15$ секунд и имел мощность $Q=1000$. Для $L_x = 180\text{м}$, $L_y = 180\text{м}$ получаем что $x_0 = 45$, $y_0 = 45$ - координаты источника.

При решении обратной задачи с мгновенным источником рассматривалось несколько вариантов расположения постов. В случае пяти постов параметры источника полностью совпали с параметрами, установленными в прямой задаче. Поэтому рассматривались и другие варианты размещения постов.

В таблице 1 представлены пять постов:

Таблица 1

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
1	120.1	120.1	119.6	0.7507404434
2	150.1	150.1	162.0	0.5361726617
3	100.1	120.1	107.1	0.5020159728
4	120.1	100.1	107.1	0.4991438433
5	100.1	150.1	132.8	0.0466062869

В таблицах, представленных ниже были рассмотрены два, три и четыре поста наблюдения.

Таблица 2

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
2	150.1	150.1	162.0	0.5361726617
4	120.1	100.1	107.1	0.4991438433
5	100.1	150.1	132.8	0.0466062869

Таблица 3

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
1	120.1	120.1	119.6	0.7507404434
2	150.1	150.1	162	0.5361726617
4	120.1	100.1	107.1	0.4991438433
5	100.1	150.1	132.8	0.0466062869

Таблица 4

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
2	150.1	150.1	162	0.5361726617
5	100.1	150.1	132.8	0.0466062869

При численной реализации обратной задачи было получено, что при расположении постов, описанных в (табл.1-табл.4) координаты источника: $x_0 = 45$, $y_0 = 45$, мощность: $Q=1000$, время срабатывания источника: $t_0 = 15$ секунд, т.е. совпадают с параметрами источника определенными в прямой задаче.

Кроме описанных результатов были получены некоторые численные результаты при внесении погрешности в наблюдаемые значения концентрации. Эти результаты показали, что погрешность решения обратной задачи меняется пропорционально погрешности внесенной в начальные данные. При этом были рассмотрены несколько случаев: 1) была внесена погрешность +10% в 5 измеренных значений концентрации и 2) погрешность +10% на 2 постах и -10% в 3 постах. При этом были получены результаты:

- 1) $Q=1000$, $x_0=53$, $y_0=53$, $t_0 = 15$ с.
- 2) $Q=1100$, $x_0=51$, $y_0=53$, $t_0 = 20,6$ с.

Кроме того, были рассмотрены случаи, когда погрешность вносилась не во все, а только в некоторые точки (табл.5-табл.7).

В таблицах 5-7 представлены параметры постов наблюдения и концентрация с внесенной погрешностью 10%.

Таблица 5

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax	погрешность
2	150.1	150.1	162.0	0.58978992787	+10%
4	120.1	100.1	107.1	0.54905822763	+10%
5	100.1	150.1	132.8	0.05126691559	+10%

Таблица 6

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax	погрешность
1	120.1	120.1	119.6	0.82581448774	+10%
2	150.1	150.1	162	0.58978992787	+10%
4	120.1	100.1	107.1	0.54905822763	+10%
5	100.1	150.1	132.8	0.05126691559	+10%

Таблица 7

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax	Погрешность
2	150.1	150.1	162	0.58978992787	+10%
5	100.1	150.1	132.8	0.05126691559	+10%

При внесении погрешности только в некоторые точки получились следующие результаты:

- 3) Для таблицы 5: $Q=1000$, $x_0=55$, $y_0=55$, $t_0 = 28,9$ с.
- 4) Для таблицы 6: $Q=1000$, $x_0=59$, $y_0=57$, $t_0 = 27,5$ с.
- 5) Для таблицы 7: $Q=1000$, $x_0=57$, $y_0=61$, $t_0 = 38$ с.

Из полученных результатов видно, что наибольшая погрешность при вычислении параметров источника возникает в случае использования наиболее отдаленных постов наблюдения.

2.8 Результаты численных расчетов обратной задачи с постоянным источником

При решении обратной задачи с постоянным источником для проверки правильности решения также использовались результаты решения прямой задачи в качестве необходимых входных данных.

Для нахождения численного решения рассмотренной задачи использовались описанные ранее разностные схемы. Входные данные брались такие же, как и для мгновенного источника.

При решении обратной задачи с постоянным источником рассматривалось несколько вариантов параметров постов. В случае пяти постов параметры источника полностью совпали с параметрами, установленными в прямой задаче. Поэтому рассматривались и другие варианты размещения постов.

В таблице 8 представлены пять постов:

Таблица 8

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
1	120.1	120.1	399.9	272.4164504978
2	150.1	150.1	399.9	16.7062839273
3	100.1	120.1	399.9	167.5997025165
4	120.1	100.1	399.9	167.5997025165
5	100.1	150.1	399.9	16.7062839273

В таблицах, представленных ниже были рассмотрены два, три и четыре поста наблюдения.

Таблица 9

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
2	150.1	150.1	399.9	16.7062839273
4	120.1	100.1	399.9	167.5997025165
5	100.1	150.1	399.9	16.7062839273

Таблица 10

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
1	120.1	120.1	399.9	272.4164504978
2	150.1	150.1	399.9	16.7062839273
4	120.1	100.1	399.9	167.5997025165
5	100.1	150.1	399.9	16.7062839273

Таблица 11

К – номер пункта наблюдения	Xobs	Yobs	Tobs	Cmax
2	150.1	150.1	399.9	16.7062839273
5	100.1	150.1	399.9	16.7062839273

При численной реализации обратной задачи было получено, что при расположении постов, описанных в (табл.8-табл.11) координаты источника: $x_0 = 45,51$, $y_0 = 45,51$, мощность: $Q=1000$, т.е. наблюдается небольшая погрешность при сравнении с параметрами источника определенными в прямой задаче и эта погрешность составляет 1,13 %.

Кроме описанных результатов были получены некоторые численные результаты при внесении погрешности в наблюдаемые значения концентрации. Эти результаты показали, что погрешность решения обратной задачи с постоянным источником аналогично задаче с мгновенным источником, меняется пропорционально погрешности внесенной в начальные данные. При внесении погрешности в параметры постов наблюдения были получены следующие результаты: $Q=1000$, $x_0=55,5$, $y_0=55,5$.

При параллельной реализации обратной задачи с постоянным источником были получены результаты, аналогичные результатам для мгновенного источника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представляемой работе была осуществлена разработка метода решения обратных модельных задач, в которых по известным данным измерения концентрации примеси определяется месторасположение, время и мощность выброса примеси. Описанные задачи можно применять и для реальных задач, например для определения расположения и интенсивности источников в г.Томске.

На примере двумерной прямой задачи протестированы разностные схемы: MLU, противопотоковая схема и схема Ботта. Тестирование показало, что схема MLU и схема Ботта имеют высокую точность.

Для решения обратной задачи в качестве входных параметров брались результаты решения прямой задачи. Исследование обратной задачи показало, что результаты ее численного решения совпадают с входными параметрами прямой задачи. Кроме того, были получены некоторые численные результаты при внесении погрешности в наблюдаемые значения концентрации. Эти результаты показали, что погрешность решения обратной задачи меняется пропорционально погрешности внесенной в начальные данные.

При параллельной реализации обратной задачи переноса примеси применена декомпозиция сеточной области. На основе проведенных экспериментов установлено, что параллельная реализация алгоритма ускоряет процесс вычислений почти в 5 раз, что связано с числом взятых процессоров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

- 1) Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды – Москва: Наука, 1982.-315с.
- 2) Беликов Д.А., Старченко А.В. Применение модели турбулентного переноса примеси к исследованию образования вторичных загрязнителей в атмосфере города // Измерения, моделирование и информационные системы для изучения окружающей среды/ Под общей редакцией Е.П.Гордова. – Томск: Издательство Томского ЦНТИ, 2006. – с.154.
- 3) Панасенко Е.А., Численное исследование переноса примеси в атмосфере // Третья всероссийская конференция молодых ученых. Фундаментальные проблемы новых технологий в 3_м тысячелетии, 2006, с.582 – 586
- 4) Вержбицкий В.М. Основы численных методов – Москва: Высшая школа, 2002.- 847с.
- 5) Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Наука. Физматлит, 1984. – 152с.
- 6) Bott A. A Positive definite advection scheme obtained by Nonlinear Renormalization of the Advective Fluxes. Monthly Weather Review, 1988, v.117, pp. 1006-1115
- 7) Noll B. Evaluation of a bounded high-resolution scheme for combustor flow computations // AIAA Journal, 1992, v.30, №1, pp.64-68.
- 8) Марчук Г.И. Методы вычислительной математики-М.:Наука, 1989.-608с.
- 9) Старченко А.В., Есаулов А.О. Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 56 с. (Starchenko A.V. and Esaulov A.O. Parallel computations using multiprocessor computers. Tomsk: Tomsk State University. 2002. – 56 p. (in Russian))
- 10) Старченко А.В., Беликов Д.А., Есаулов А.О. Численное исследование влияния метеорологических параметров на качество воздуха в городе (на примере города Томска) //Материалы конференции ENVIROMIS2002. Томск: Изд-во ЦНТИ, 2002. (Starchenko A.V., Belikov D.A. and Esaulov A.O. Numerical Investigation of Meteorology Influence on Urban Air Quality (for Tomsk city conditions) //Proceedings of International Conference ENVIROMIS-2002. 6-12 July 2002, Tomsk. Russia. – Tomsk: Tomsk CNTI. 2002. – PP. (in Russian))