

Российская академия наук Сибирское отделение

Институт вычислительной математики и математической геофизики

УДК 551.51 + 519.6

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИВМ и МГ СО РАН  
чл.-корр. РАН Михайленко Б.Г.

---

«05» июля 2007 г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ  
**ОБНАРУЖЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ЗАГРЯЗНЕНИЙ  
С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ**

Государственный контракт № 02.517.11.9011  
в рамках ФЦНТП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы»

Исполнитель,  
Ведущий инженер,  
аспирант

---

подпись, дата

Пененко А.В.

Новосибирск 2007

### **СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ**

|                                                |       |                                  |
|------------------------------------------------|-------|----------------------------------|
| Научный руководитель,<br>Д. ф.- м.н, профессор | _____ | Пененко В.В.<br>(раздел(ы) 1-4 ) |
| Исполнитель темы                               |       |                                  |
| ведущий инженер, аспирант                      | _____ | Пененко А.В.<br>(раздел(ы) 1-4 ) |

## **РЕФЕРАТ**

Отчет 20 с., 4 ч., 7 рис., 1 табл., 7 источников,

### **ОБНАРУЖЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ПРИМЕСИ, ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ПРЯМЫЕ И СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ, МОДЕЛЬ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ, СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ, ФУНКЦИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ**

Объектом исследования является задача об оперативном обнаружении, локализации пространственно-временного распределения и оценки мощности точечных источников примеси в атмосфере на основании данных измерений концентрации.

Целью работы является реализация разрабатываемых в ИВМ и МГ алгоритмов вариационного усвоения данных на базе 4-х мерной модели адвекции-диффузии примеси в атмосфере, способной использовать оперативные метеорологические данные. Для отработки методики использованы данные о полях гидрометеорологических характеристик, в частности, предоставляемые оперативной моделью Датского метеорологического института (DMI HIRLAM).

Для решения задачи локализации источников применяются вариационные методы. Конкретно, данная работа сводится к построению численных схем и алгоритмов на базе вариационных принципов, а также их реализации для задач идентификации источников с помощью построенной модели адвекции-диффузии примеси в атмосфере (в прямой и обратной модах с сопряженными уравнениями) с использованием доступной фактической информации.

В результате работы создана новая версия 4D переноса примесей в атмосфере, реализованы алгоритмы и программы, способные на основании оперативных метеоданных, данных измерений концентрации примеси, а также априорной информации о мощности источников, выдвигать гипотезы о расположении точечных источников.

Для внедрения результатов данной НИР в оперативную практику может потребоваться кодирование программы на языке более низкого уровня, обеспечивающего более высокую производительность вычислений. Также, эффективность реализации может увеличиться вследствие распараллеливания независимых процессов.

Областью применения разработки являются задачи оперативного обнаружения неизвестных источников примеси для целей охраны окружающей среды и экологической безопасности.

Дальнейшим шагом на пути развития данной работы может быть решение задачи о построении и реализации алгоритма отсека ошибочных гипотез о расположении источников, появляющихся за счет неопределенностей, имеющихся как в системе моделирования, так и в информационном обеспечении.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение .....                                                             | 7         |
| <b>1. Задача локализации источника пассивной примеси в атмосфере .....</b> | <b>8</b>  |
| 1.1. <i>Физическая постановка задачи</i> .....                             | 8         |
| 1.2. <i>Математическая постановка</i> .....                                | 8         |
| 1.3. <i>Модель</i> .....                                                   | 8         |
| 1.4. <i>Расчет коэффициентов модели</i> .....                              | 9         |
| 1.5. <i>Данные измерений</i> .....                                         | 10        |
| <b>2. Аппроксимация Модели .....</b>                                       | <b>11</b> |
| 2.1. <i>Аппроксимация</i> .....                                            | 11        |
| 2.2. <i>Схема расщепления</i> .....                                        | 12        |
| <b>3. Обнаружение источников .....</b>                                     | <b>13</b> |
| 3.1. <i>Тождество Лагранжа</i> .....                                       | 13        |
| 3.2. <i>Общая методика локализации источников</i> .....                    | 13        |
| 3.3. <i>Случай единственного точечного источника</i> .....                 | 14        |
| 3.4. <i>Случай множественных источников</i> .....                          | 14        |
| <b>4. Численные Эксперименты .....</b>                                     | <b>16</b> |
| 4.1. <i>Общая постановка</i> .....                                         | 16        |
| 4.2. <i>Сценарий с единственным точечным источником</i> .....              | 16        |
| 4.1. <i>Сценарий с источником длительного действия</i> .....               | 17        |
| <b>Заключение .....</b>                                                    | <b>19</b> |
| <b>Список использованных источников .....</b>                              | <b>20</b> |

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Задача локализации источника примеси – задача о нахождении (наименьшей) пространственно-временной области, в которой находится источник примеси.

Пассивная примесь – примесь, которая не реагирует с другими веществами, содержащимися в атмосфере.

Точечные измерения концентраций примеси (событие измерения) – измерения концентрации примеси, производимые в определенных точках пространства в определенные моменты времени.

Мощность источника примеси – величина, характеризующая количество примеси, выбрасываемой данным источником за единицу времени.

Прямая задача – задача об определении концентрации примеси на основании модели процесса переноса примеси и известных источников.

Сопряженная задача – задача о нахождении сопряженной функции - функции чувствительности целевого функционала к вариациям параметров источников (см. Часть 3.1).

$\Omega_T$  - пространственно-временная область,  $\Omega$  - пространственная область,

$\partial\Omega$  - граница области,  $\partial\Omega_{GRND} = \partial\Omega|_{h=1}$  нижняя граница области (поверхность Земли)

$l \in [l_w, l_e], q \in [q_s, q_n], h \in [1, 0], t \in [0, T]$  - координаты, интерпретирующиеся как долгота, широта, высота, время и соответствующие им области изменения.  $\bar{X} := (l, q, h)$ ;

$a$  - радиус Земли;

$\langle u, v \rangle_m$  - взвешенное скалярное произведение,  $\langle u, v \rangle$  - основное скалярное произведение;

$Q$  - источник,  $l$  - индекс точечного источника,  $Nq$  - число точечных источников, составляющих  $Q$

$q_l, \bar{x}_l, t_l$  - мощность и координаты  $l$ -го источника.

$d(\bar{x} - \bar{x}_l)d(t - t_l)$  - дельта функция, определяемая соотношением

$$\langle u, d(\bar{x} - \bar{x}_l)d(t - t_l) \rangle = u(\bar{x}_l, t_l);$$

$j$  - концентрация примеси;

$A(h), B(h)$  - заданные функции, описывающие гибридную вертикальную систему координат

$$m = \frac{\partial p}{\partial h};$$

$K(\bar{x}, t) = \text{diag}(K_x, K_y, K_z)(\bar{x}, t)$  - тензор коэффициентов диффузии;

$\frac{\partial}{\partial n}$  - производная по нормали к границе области;

$\bar{u}(\bar{x}, t) = (u, v, w)(\bar{x}, t)$  - скорости ветра (горизонтальные и вертикальная, соответственно);

$Temp(\bar{x}, t)$  - температура;

$p_s(l, q, t)$  - давление на поверхности Земли;

$p(\bar{x}, t)$  - давление;

$X \cdot Y$  - скалярное произведение 2-х конечномерных векторов;

$k = 0.4$  - константа Кармана;

$g$  - гравитационная постоянная;

$R$  - универсальная газовая постоянная;

$$dx = a \cos q \, dl, dy = a \, dq, dz = \left( -\frac{1}{m} \frac{g \cdot p}{R \cdot Temp} \right) \frac{\partial}{\partial h} - \text{метрики по}$$

пространственным координатам;

$q$  - потенциальная температура;

$R_i, R_{ic}$  - числа Ричардсона;

$\chi \in \Xi$  - индекс события измерения и множество событий измерений, соответственно;

$I_\chi$  - результат измерения,  $\bar{X}_\chi, t_\chi$  - координаты измерения;

$W_T = W \times W_{[0,T]} = \{(l_i, q_j, h_k, t_n) \mid i = 1 \dots Nx, j = 1 \dots Ny, k = 1 \dots Nz, n = 1 \dots Nt\}$  - сетка в области  $\Omega_T$ ;

$(i, j, k, n)$  - дискретные координаты;

$\Delta l, \Delta q, \Delta h, t$  - шаги пространственно-временной сетки;

$dl_i, dq_j, dh_k, dt_n$  - вспомогательные шаги сетки;

$D_{ijk}, \partial D_{ijk}$  - элементы метрики в сеточной области;

$$\langle u^n, v^n \rangle_w^h = \sum_{i,j,k} u_{ijk}^n v_{ijk}^n D_{ijk} - \text{дискретное скалярное произведение на } W$$

$$\langle u^n, v^n \rangle_{\partial w}^h = \sum_{i,j,k} u_{ijk}^n v_{ijk}^n \partial D_{ijk} - \text{дискретное скалярное произведение на поверхности земли}$$

$$\langle u, v \rangle^h = \sum_{i,j,k} \langle u^n, v^n \rangle_w^h dt_n - \text{дискретное скалярное произведение на } W_T$$

$V^n = V_x^n + V_y^n + V_z^n, L^n = L_x^n + L_y^n + L_z^n$  - дискретные операторы переноса и диффузии

$H$  - оператор, сопоставляющий сеточной функции, определенной на поверхности земли сеточную функцию равную нулю во всей области за исключением приземного слоя, и равную исходной на поверхности земли.

$Y$  - сопряженная функция

$[\cdot]^*$  - операция транспонирования относительно заданного скалярного произведения

$$\Psi^n = \frac{t}{dt_{Nt+1}} [m^n H]^* y^{n-\frac{2}{3}} - \text{весовая функция}$$

$\Omega_\Psi$  - множество локализации (множество, которое может содержать источник) соответствующее весовой функции  $\Psi$ .

$Ind \Omega_{\Psi_s}$  - функция-индикатор множества  $\Omega_{\Psi_s}$

$$S_a^\Psi = \{(\bar{x}, t) \in \Omega_T \mid \Psi(\bar{x}, t) > a\} - \text{множество уровня } a \text{ весовой функции } \Psi$$

## Введение

Задача об идентификации источников примесей в атмосфере в разных аспектах рассматривалась в работах [1-10]. В данной теме наиболее теоретически разработанным является вопрос построения связи между данными наблюдений и неизвестными источниками с помощью сопряженных задач и весовых функций (см. например [1],[3-7]). Подобная связь позволяет свести задачу об обнаружении источников к задаче о восстановлении функции по её проекциям. Сложность полученной задачи состоит в том, что множество функций, на которое производится проектирование функции-источника (множество весовых функций), не является полным, и, следовательно, задача, вообще говоря, имеет неединственное решение. В случае, когда известно пространственное расположение источников, задача упрощается. Самым сложным является случай, когда пространственное расположение источников неизвестно.

Одним из подходов, предлагаемым в [5-6],[8] является подход, при котором решение задачи ищется как линейная комбинация весовых функций. Однако в случае точечных источников вид весовых функций и вид источников отличается. Следовательно, для обнаружения точечных источников при таком подходе требуется предложить способ интерпретации получаемых распределенных решений, позволяющий на их основе получить решения вида «точечный источник». В данной работе развивается подход [4,6]. Новыми элементами предлагаемого здесь метода поиска источников является использование априорной информации о мощности источников и фактической информации об интенсивности наблюдаемых сигналов на станциях мониторинга для выделения на носителях весовых функций (функций чувствительности) областей, в которых могут располагаться источники. Локализация источников ищется как пересечение таких областей.

Алгоритмы совместного использования моделей и данных измерений на базе вариационных методов на протяжении долгого времени теоретически и практически разрабатываются в рамках соответствующей тематики в ИВМ и МГ СО РАН [4,7,9-10]. В данной работе ставится цель соединить теоретические наработки по методам локализации источников с моделью, пригодной для работы с реальными данными. Работа является продолжением [4, 9-10].

В процессе разработки и тестирования системы, использовались метеорологические данные, предоставленные Датским Метеорологическим Институтом, а также данные об Европейской системе измерений, использовавшейся в эксперименте etex1\_v1.1.960505. Реализованная система позволяет использовать для вычисления коэффициентов модели метеоданные, генерируемые оперативной моделью DMI HIRLAM и данные измерений концентраций, получаемых европейской наблюдательной системой. Здесь существенно использован опыт работы по проекту «ENVIRO-RISKS» (контракт Европейской комиссии N 013427) и опыт работы коллектива сотрудников DMI под руководством А.А.Бакланова. Теоретические разработки частично поддержаны грантом РФФИ 07-05-00673.

# 1. ЗАДАЧА ЛОКАЛИЗАЦИИ ИСТОЧНИКА ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ

## 1.1. Физическая постановка задачи

Предполагается, что процесс распространения примеси в атмосфере полностью описывается переносом примеси воздушными массами, а также её диффузией. Считается, что где-то в неизвестных точках пространственно-временной области (на поверхности земли) происходят выбросы определенного вещества. В некоторые другие моменты времени в других точках пространства производятся измерения концентрации примеси. По этим данным требуется восстановить неизвестные места расположения источников. Мощность источников точно неизвестна, однако относительно неё имеются некоторые предположения.

## 1.2. Математическая постановка

Шаровой сегмент (часть земной атмосферы), на котором решается задача, определяется выражением

$$\Omega_T = \Omega \times [0, T] = \{(l, q, h, t) \mid l \in [l_w, l_e], q \in [q_s, q_n], h \in [1, 0], t \in [0, T]\},$$

На этой области задано скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle_m = \int_{\Omega_T} u(l, q, h, t) v(l, q, h, t) [a \cos q dl] [adq] [-mdh] dt,$$

где  $m > 0$  - некоторая функция.

На нижней границе области (поверхность земли)

$$\partial\Omega_{GRND} = \Omega|_{h=1}$$

задан источник вида

$$Q = \sum_{l=1}^{Nq} q_l d(\bar{x} - x_l) d(t - t_l).$$

Однако его расположение и точная мощность неизвестны. Предполагается, что известна только некоторая априорная информация о его параметрах.

## 1.3. Модель

Предполагается, что процесс распространения примеси описывается системой уравнений

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \bar{u} \cdot \text{grad } j - \text{div}(K \text{grad } j) = 0, (\bar{x}, t) \in \Omega_T,$$

$$j|_{t=0} = 0,$$

$$K \frac{\partial j}{\partial n} - \bar{u}_n j = 0, x \in \partial\Omega / \partial\Omega_{GRND},$$

$$K \frac{\partial j}{\partial n} - \bar{u}_n j = Q, x \in \partial\Omega_{GRND},$$

$$K = \text{diag}(K_x, K_y, K_z).$$

Дифференциальные операторы и функции состояния здесь рассматриваются в пространстве со скалярным произведением  $\langle u, v \rangle_m$ .

При дискретизации умножим эту систему на некоторую весовую функцию  $m$ , которая характеризует метрику по вертикальной координате, и будем использовать скалярное произведение со следующей структурой

$$\langle mu, v \rangle = \langle u, v \rangle_m.$$

#### 1.4. Расчет коэффициентов модели

Считается, что следующие известны метеорологические данные:

$$u(\bar{x}, t), v(\bar{x}, t), Temp(\bar{x}, t), p_s(l, q, t).$$

Функция  $h$ , определяющая высоту, задаётся в гибридной системе координат с помощью соотношения

$$p(l, q, h, t) = A(h) + B(h) p_s(l, q, t),$$

где  $A(h), B(h)$  - заданные функции.

Функция  $m$  определяется как

$$m = \frac{\partial p}{\partial h}.$$

На основании этих данных вычисляются остальные коэффициенты. Уравнение неразрывности в выбранной систем координат имеет вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} + (u, v) \cdot grad(m) + div(mu, mv) + \frac{\partial}{\partial h}(mh) = 0.$$

С его помощью рассчитывается аналог вертикальной скорости  $h$ .

В данной работе параметризованные коэффициенты диффузии вычисляются по следующим формулам.

**Алгоритм:** Вычисление коэффициентов горизонтальной диффузии

$$K_x = K_y = K_h = K_{h0} + \frac{1}{2} k^2 dx \cdot dy \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

$$K_{h0} = 0.003 \cdot \frac{dx \cdot dy}{dt},$$

$$k = 0.4.$$

**Алгоритм:** Вычисление коэффициента вертикальной диффузии

$$K_z = \left(-\frac{1}{m} \frac{g \cdot p}{R \cdot T}\right)^2 \cdot \begin{cases} K_{z0} + l_K^2 \sqrt{U} \frac{R_{ic} - R_i}{R_{ic}}, R_i < R_{ic}, \\ K_{z0}, R_i \geq R_{ic} \end{cases},$$

$$U = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + e, e \approx 10^{-9},$$

$$K_{z0} = 1, l \approx 40, R = 287,$$

$$R_{ic} = 0.257 \cdot \left(-\Delta p \frac{R \cdot Temp}{g \cdot p}\right)^{0.175},$$

$$R_i = \frac{g}{q \cdot S} \frac{\partial q}{\partial z},$$

$$q = Temp \cdot \left(\frac{1000}{R}\right)^{0.288},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \left( -\frac{1}{m} \frac{g \cdot p}{R \cdot Temp} \right) \frac{\partial}{\partial h}.$$

### 1.5. Данные измерений

Процедура поиска источников использует данные измерений концентрации в некоторой совокупности точек на поверхности земли. Данные измерений задаются как функционалы, определяемые соотношением

$$I_x = u(l_x, q_x, 1, t_x) = \left\langle u, d(\cdot - l_x, \cdot - q_x, \cdot - 1, \cdot - t_x) \right\rangle_m, x \in \Xi.$$

Такая модель наблюдений может осуществляться сетью наземных станций, измеряющих концентрацию вещества (трассера), выбрасываемого из источников. Напомним, что в данной работе примесь считается консервативной, т.е. процессы трансформации не рассматриваются.

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ МОДЕЛИ

### 2.1. Аппроксимация

Введем в пространственно-временной области сетку

$$w_T = \{(l_i, q_j, h_k, t_n) | i = 1 \dots Nx, j = 1 \dots Ny, k = 1 \dots Nz, n = 1 \dots Nt\}$$

с шагами  $\Delta l, \Delta q, \Delta h, t$  соответственно. Введем вспомогательные метрические коэффициенты

$dl_i, dq_j, dh_k, dt_n$ , такие, что  $dl_1 = dl_N = \frac{h}{2}, dl_2 = \dots = dl_{N-1} = h$  и рассмотрим

пространство сеточных функций. На нём определим скалярное произведение:

$$D_{ijk} = a \cos q_j dl_i dq_j [-dh_k]$$

$$\partial D_{ijk} = a \cos q_j dl_i dq_j$$

$$\langle u^n, v^n \rangle_w^h = \sum_{i,j,k} u_{ijk}^n v_{ijk}^n D_{ijk}$$

$$\langle u, v \rangle^h = \sum_{i,j,k} \langle u^n, v^n \rangle_w^h dt_n$$

Аппроксимируем основные агрегаты модели переноса с учетом уравнения неразрывности.

Базовые конструкции имеют вид :

$$m \cdot \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial(m \cdot j)}{\partial t} - j \cdot \frac{\partial m}{\partial t} \approx m^{n-1} \cdot \frac{j^n - j^{n-1}}{t},$$

$$\left( \frac{m \cdot u}{a \cos q} \cdot \frac{\partial j}{\partial l} \right)_{ijk}^n \approx \left( \frac{[m \cdot u]_{i+\frac{1}{2}}^- (j_i - j_{i+1}) + [m \cdot u]_{i-\frac{1}{2}}^+ (j_i - j_{i-1})}{a \cos q_j dl_i} \right)_{jk}^n,$$

$$\left( \frac{m}{m a \cos q} \frac{\partial j}{\partial l} K_x m \frac{\partial j}{\partial l} \right)_{ijk}^n \approx \left( \frac{[K_x \cdot m]_{i+\frac{1}{2}} \frac{j_{i+1} - j_i}{a \cos q_j \Delta l_i} - [K_x \cdot m]_{i-\frac{1}{2}} \frac{j_i - j_{i-1}}{a \cos q_j \Delta l_{i-1}}}{a \cos q_j dl_i} \right)_{jk}^n,$$

Аналогично производится дискретизация остальных слагаемых уравнения. В итоге, получим разностную систему вида

$$m^{n-1} \cdot \frac{j^n - j^{n-1}}{t} + V^n j^n + L^n j^n = m^n H \frac{Q^n}{-dh_1},$$

$$V^n = V_x^n + V_y^n + V_z^n, L^n = L_x^n + L_y^n + L_z^n,$$

$$j^0 = 0.$$

Данные измерений определяются как набор функционалов

$$j_{ijk}^n = \langle j, d_{ijk}^n \rangle^h,$$

с их помощью требуется найти носитель  $Q^n$ .

Построенная таким образом численная схема обладает следующими свойствами: монотонность, транспортность, сохранение количества вещества. Матрица оператора имеет строгое диагональное преобладание, что обеспечивает положительность обратной матрицы и устойчивость вычислений. Для целей усвоения данных используется неявная схема первого порядка по времени. Аппроксимация по пространственным переменным оценивается с учетом дискретного аналога уравнения неразрывности.

## 2.2. Схема расщепления

Прямая задача решается методом расщепления [2,3] по пространственным переменным в следующей последовательности:

$$j^0 = 0,$$

$$m^{n-1} \cdot \frac{j^{n-\frac{2}{3}} - j^{n-1}}{t} + V_z^n j^{n-\frac{2}{3}} + L_z^n j^{n-\frac{2}{3}} = m^n H \frac{Q^n}{-dh_1},$$

$$m^{n-1} \cdot \frac{j^{n-\frac{1}{3}} - j^{n-\frac{2}{3}}}{t} + V_y^n j^{n-\frac{1}{3}} + L_y^n j^{n-\frac{1}{3}} = 0,$$

$$m^{n-1} \cdot \frac{j^n - j^{n-\frac{1}{3}}}{t} + V_x^n j^n + L_x^n j^n = 0.$$

### 3. ОБНАРУЖЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ

#### 3.1. Тождество Лагранжа

Тождество Лагранжа позволяет связать данные измерений с источниками [1-4,7,10].

**Утверждение:** Если сеточная функция  $j$  удовлетворяет расщепленной прямой задаче, а сеточная функция  $y$  удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} m^{n-1} \cdot \frac{y^n}{t} + [V_x^n + L_x^n]^* y^n &= m^n \cdot \frac{y^{(n+1)-\frac{2}{3}}}{t} \frac{dt_{n+1}}{dt_n}, \\ m^{n-1} \cdot \frac{y^{n-\frac{1}{3}}}{t} + [V_y^n + L_y^n]^* y^{n-\frac{1}{3}} &= m^{n-1} \cdot \frac{y^n}{t}, \\ m^{n-1} \cdot \frac{y^{n-\frac{2}{3}}}{t} + [V_z^n + L_z^n]^* y^{n-\frac{2}{3}} &= m^{n-1} \cdot \frac{y^{n-\frac{1}{3}}}{t}, \end{aligned}$$

тогда верно равенство

$$\left\langle j^{j-1}, m^{j-1} y^{j-\frac{2}{3}} \right\rangle_w^h dt_j + t \left\langle m^j H \frac{Q^j}{dh_1}, y^{j-\frac{2}{3}} \right\rangle_w^h dt_j = \left\langle j^{(j+1)-1}, m^{(j+1)-1} y^{(j+1)-\frac{2}{3}} \right\rangle_w^h dt_{j+1}.$$

**Следствие:**

$$\sum_{n=1}^{Nt} \left\langle Q^n, \frac{t}{dt_{Nt+1}} [m^n H]^* y^{n-\frac{2}{3}} \right\rangle_{\partial w}^h dt_j = \left\langle j^{Nt}, [m^{Nt}]^* y^{(Nt+1)-\frac{2}{3}} \right\rangle_w^h.$$

Если при этом

$$[m^{Nt}]^* y^{(Nt+1)-\frac{2}{3}} = d_{ijk},$$

то тогда

$$j_{ijk}^{Nt} = \sum_{n=1}^{Nt} \left\langle Q^n, \frac{t}{dt_{Nt+1}} [m^n H]^* y^{n-\frac{2}{3}} \right\rangle_{\partial w}^h dt_j.$$

Обозначим весовую функцию (функцию чувствительности функционала наблюдений к вариациям параметров источников) как

$$\Psi^n = \frac{t}{dt_{Nt+1}} [m^n H]^* y^{n-\frac{2}{3}},$$

тогда

$$j_{ijk}^{Nt} = \langle Q, \Psi \rangle^h.$$

#### 3.2. Общая методика локализации источников

Связав данные измерений посредством функции чувствительности с источниками, мы свели задачу о локализации источников к задаче о восстановлении функции по её проекциям.

Действительно, каждому событию измерения соответствуют результат измерения, координаты проведения измерения и соответствующая весовая функция. В общем случае, подобные задачи имеют неединственное решение. Действительно, источник «малой мощности», находящийся «близко» к точке измерения, может дать такой же сигнал, как и «мощный» источник, находящийся «далеко» от точки измерения. Поэтому в общем случае можно говорить лишь о некоторых гипотетических локализациях возможных источников.

Для построения таких гипотез мы будем использовать функции локализации, обозначаемые дальше через  $\Phi$ . Заметим, что все работы по построению весовых функций для различных событий измерений являются независимыми, и, следовательно, могут проводиться параллельно. Алгоритмы построения гипотез относительно расположения источников, представленные далее, могут генерировать «фантомные» источники, которые являются следствием недоопределенности задачи, упомянутые выше. Для того чтобы отсеять подобные решения, требуется привлекать дополнительные данные. Так как функции локализации зависят от того, какие априорные данные используются, то возможно параллельно поддерживать несколько гипотетических расположений источников.

### 3.3. Случай единственного точечного источника

Построим функцию локализации в предположении, что в области находится единственный точечный источник вида

$$Q = q_l d(\bar{x} - \bar{x}_l) d(t - t_l).$$

**Утверждение:** Пусть известно, что

$$q_{\min} \leq q_l \leq q_{\max},$$

и в точке с дискретными координатами  $(i, j, k, n)$  в результате измерений получено значение сигнала  $I$ , тогда источник может находиться в области

$$\Omega_{\Psi} = \left\{ (i, j, k, n) \in w \mid q_{\min} \left\langle d_{ijk}, \Psi^n \right\rangle_{\partial w}^h dt_n \leq I \leq q_{\max} \left\langle d_{ijk}, \Psi^n \right\rangle_{\partial w}^h dt_n \right\}.$$

Пусть в нашем распоряжении имеется набор данных измерений и для них рассчитаны соответствующие весовые функции  $\{(I_x, \Psi_x) \mid x \in \Xi\}$ . Определим функцию локализации как

$$\Phi = \sum_{s \in \Xi} Ind \Omega_{\Psi_s}.$$

**Замечание 1:** Чем более точно известна мощность источника, тем меньше характерные размеры области  $\Omega_{\Psi}$ , и, следовательно, тем точнее производится локализация.

**Замечание 2:** Функцию локализации можно строить по мере поступления данных.

**Замечание 3:** В качестве гипотетических источников предлагается брать точки локального максимума функции локализации.

### 3.4. Случай множественных источников

Построим функцию локализации в предположении, что в области находится набор точечных источников. Для этого введем определение множества значений носителя весовой функции заданного уровня значимости

$$S_a^{\Psi} = \{(\bar{x}, t) \in \Omega_T \mid \Psi(\bar{x}, t) > a\}.$$

Как и в случае 3.3, на носителе весовой функции выделим область, где могут находиться источники, для этого воспользуемся следующими соображениями.

**Утверждение:** Пусть  $I$  некоторый результат измерения и  $\Psi$  соответствующая весовая функция, тогда, если известно, что из

$$\langle Q, 1 \rangle_Z < q,$$

следует, что внутри области  $Z \subset \Omega_T$  нет точечных источников, то тогда внутри области  $S_{a_1}^\Psi$ , где  $a_1 = \frac{I}{q}$  нет источников.

**Замечание:** Условие утверждения выполняется, если например

$$q < \min_{l \in M} [q_s \langle d(\cdot - \bar{x}_l) d(\cdot - t_l), 1 \rangle].$$

Константа  $q$  описывает мощность наименьшего наблюдаемого источника.

**Утверждение:** Пусть  $a_2 \geq \frac{I}{\langle Q, 1 \rangle}, I > 0$ , тогда в области  $S_{a_2}^\Psi$  гарантированно имеется источник.

Определим множество локализации как

$$\Omega_\Psi = S_{a_2} \setminus S_{a_1},$$

тогда функция локализации имеет вид

$$\Phi = \sum_{s \in \Xi} \text{Ind} \Omega_{\Psi_s}.$$

Аналогично, в качестве гипотетических расположений источников предлагаются локальные максимумы функции локализации.

**Замечание:** В качестве априорных данных можно задать оценку мощности минимального искомого источника, а также оценку суммарной мощности всех искомых источников. Различные значения этой априорной информации, вообще говоря, порождают различные гипотезы о распределении источников.

## 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

### 4.1. Общая постановка

В приводимых ниже численных экспериментах сценарии формируются следующим образом. Задаются источники примеси и с помощью решения прямой задачи вычисляются значения концентраций, которые интерпретируются как данные измерений. Метеорологические данные, необходимые для работы модели, предоставлены Датским Королевским Метеорологическим институтом и соответствуют периоду 23 октября 1995 - 27 октября 1995 (86 часов). Рассматриваемая пространственная область – регион земного шара, содержащий Европу. В качестве системы измерений взята система, применявшаяся в эксперименте etex1\_v1.1.960505, насчитывающая 168 наблюдательных комплексов.

Общие параметры эксперимента

| Название                        | Обозначение | Величина |
|---------------------------------|-------------|----------|
| Число шагов по времени          | $Nt$        | 86       |
| Величина шага по времени        | $t$         | 3600 сек |
| Число шагов по долготе          | $Nx$        | 100      |
| Величина шага по долготе        | $\Delta l$  | 0.2288°  |
| Число шагов по широте           | $Nx$        | 100      |
| Величина шага по широте         | $\Delta q$  | 0.3182 ° |
| Число шагов по высоте           | $Nz$        | 40       |
| Величина шага по высоте         | $\Delta h$  | 0.026    |
| Число наблюдательных комплексов |             | 168      |

### 4.2. Сценарий с единственным точечным источником

В первом сценарии в заданной точке пространства в начальный момент времени действует источник. Через 20 часов европейской системой измерений (рис.1 (слева)) проводится измерение концентрации изучаемой примеси. По этим данным производится попытка восстановить место расположения источника. На рис.1 (справа) представлен пример сопряженной функции. На рис.2 (слева) представлена получающаяся при этом функция локализации, а на рис.2 (справа) изображено решение прямой задачи на поверхности земли (в зависимости от времени). На основании графиков можно заключить, что местоположение источника восстановлено довольно точно.

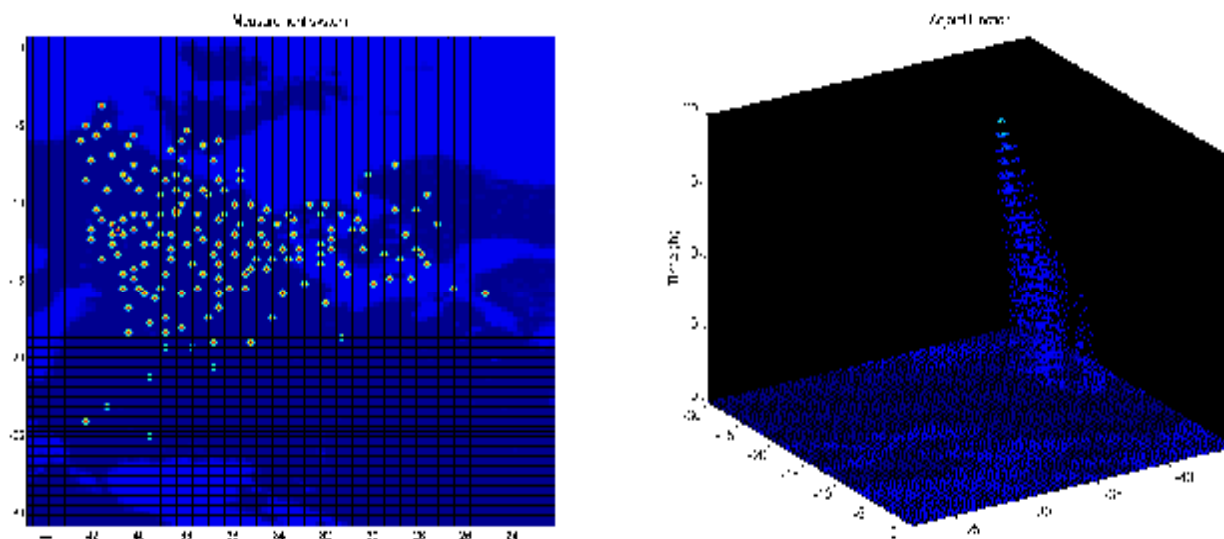


Рис.1. Система измерений (слева). Пример сопряженной функции(справа)

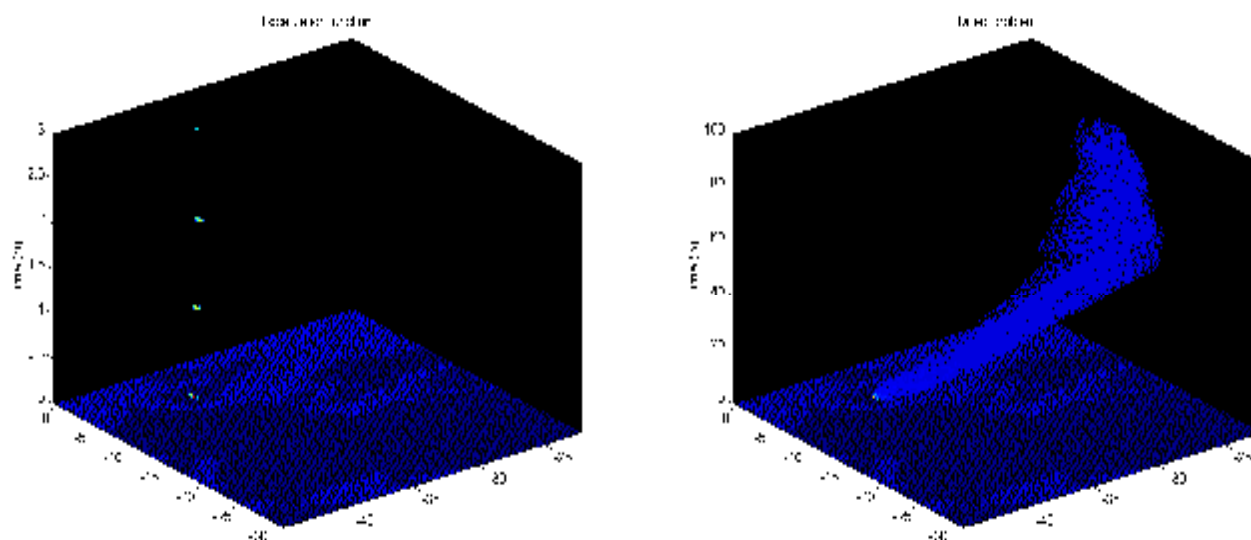


Рис.2. Функция локализации (слева). Концентрация примеси на поверхности земли (справа).  
Вертикальная координата на рисунках- время в часах.

#### 4.1. Сценарий с источником длительного действия

На протяжении 10 часов действует источник постоянной мощности. Через 10 часов после окончания его работы всей измерительной системой (рис.1 (слева)) производятся измерения концентрации примеси, и на основе этих данных восстанавливается расположение источника. На рис.3 изображена концентрация примеси на поверхности земли. На рис.4 (слева) приводится получающаяся при восстановлении источника функция локализации, а на рис.4 (справа) – действительное расположение источника. Из рисунков видно, что кроме действительного источника алгоритм находит ещё ряд точек, в которых может находиться источник. Для удаления подобных «фантомных» источников необходимо привлекать дополнительные данные.

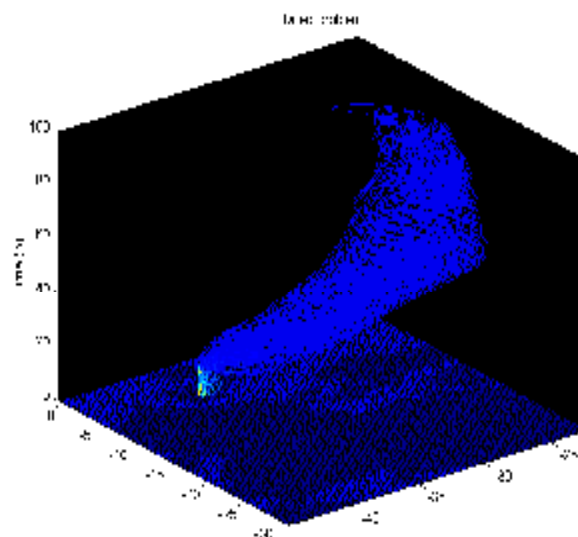


Рис.3. Концентрация примеси на поверхности земли.

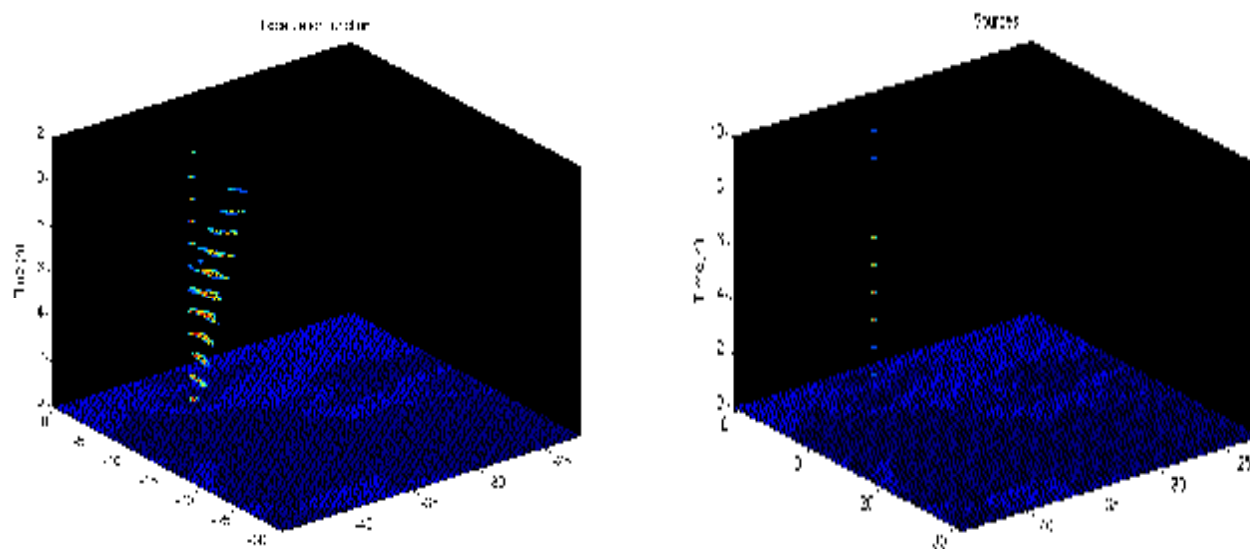


Рис.4. Функция локализации (слева). Реальное расположение источника (справа).  
Вертикальная координата – время.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной работы

- реализована новая версия 4-х мерной модели адвекции-диффузии примеси в атмосфере, обладающая свойствами монотонности, транспортности, устойчивости;
- реализованы процедуры, которые позволяют для вычисления коэффициентов модели использовать оперативные метеорологические данные, предоставляемые моделью DMI HIRLAM;
- в рассмотренной постановке предложено несколько новых алгоритмов построения гипотез о расположении точечных источников на основании данных измерений концентрации примеси;
- проведены различные численные эксперименты для случая Европейской наблюдательной системы, показывающие работоспособность алгоритмов.

Задача реализации разрабатываемых алгоритмов локализации источников на модели, способной работать с реальными метео данными, решена.

Работа является одним из этапов в создании оперативной системы обнаружения источников примеси с использованием вариационных принципов и методов теории чувствительности моделей и функционалов. В результате внедрения результатов данной НИР можно получить программный комплекс, который на основании оперативных метеорологических данных, данных измерений, а также наборов априорной информации будет строить наборы гипотез относительно расположения источников примеси.

Так как большая работы по разработке и проектированию программного комплекса уже проведены, то для эффективного внедрения потребуется реализация алгоритма (кодирование) на языке программирования более низкого уровня (обеспечивающего большую производительность). Этот вопрос тем более важен, что алгоритм производит большое количество вычислений. Также, для эффективной реализации потребуется распараллеливание независимых процессов (возможные точки алгоритма, допускающие распараллеливание, указаны в тексте).

Разрабатываемый подход является оригинальным. Он использует полученные к данному моменту результаты, имеющиеся в мировой практике, и является их продолжением и развитием.

Автор выражает благодарность оргкомитету Международной конференции и Школы молодых ученых «CITES-2007» за поддержку настоящей работы и предоставление возможности участия в данных мероприятиях.

## Список использованных источников

1. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992
2. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
3. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов, Гидрометеиздат, Ленинград, 1981.
4. Penenko V.V. Some aspects of mathematical modeling using the models together with observational data// Bull. Nov. Comp. Cent., 1996, N4, P 31-52
5. Pudykiewicz J.A. Application of adjoint tracer transport equation for evaluating source parameters// Atmos. Environ. 1998, V.32 p.3039-3050
6. V. Penenko, A. Baklanov, and E. Tsvetova, Methods of sensitivity theory and inverse modelling for estimation of source parameters// *FGCS*, v.18, 661-671 (2002).
7. Пененко В.В. Методы обратного моделирования и оценки экологических рисков от антропогенных воздействий// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003, т.10 №1, 26-38.
8. Issartel J.P. Rebuilding source of linear tracers after atmospheric concentration measurements// Atmos. Chem. Phys. Discuss. 2003, N3, P.3173-3203
9. Penenko A.V. Sequential variational data assimilation. Proceedings of SPIE, v.6160, 2005, 61602D, pp. 1-9.
10. Пененко А.В. Некоторые теоретические и прикладные вопросы последовательного вариационного усвоения данных. Вычислительные технологии, 2006, т. 11, №12, 35-40.